
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
ANCIENNE & MODERNE
EMILE BLANCHARD
10, Rue de la Sorbonne, PARIS
SUCCURSALE :
ÉCHANGE
NEUFS & D'OCCASION
COMMISSION
RELIURE
1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMÉTRIE.

Contenant les Principes, la Construction & l'Usage des Tables des SINUS, des TANGENTES & des LOGARITHMES : la TRIGONOMÉTRIE-RECTILIGNE avec son application au mesurage des distances inaccessibles, au Toisé, à l'Arpentage & aux Fortifications : & la TRIGONOMÉTRIE-SPHÉRIQUE, avec la maniére de s'en servir pour résoudre tous les problêmes de l'Astronomie & de la Géographie qui en dépendent.

Ouvrage nécessaire aux jeunes Gens qui font leur cours de Philosophie, & à toutes les personnes qui se destinent au Toisé, à l'Arpentage, à l'Architecture, au Génie, à la Marine, à l'Astronomie, &c.

Par M. AUDIERNE.



A PARIS,

Chez CLAUDE HERISSANT, rue Neuve Notre-Dame, à la Croix d'or & aux trois Vertus.

M. DCC. LVI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

A MONSIEUR DE SALABERRY

Président de la Chambre des Comptes.

MONSIEUR,

Un Auteur ambitieux ou interessé cherche dans une Dédicace, souvent plus flateuse que sincére, la protection d'un Mécène fameux par son crédit ou par son luxe. Un Philosophe de mauvaise humeur, que son orgueil, peut-être justement humilié, a dégoûté du commerce des Grands, & que son amour propre établit au dessus du reste des hommes, appelle sagesse l'indifférence qu'il a pour les uns, & grandeur d'ame le mépris qu'il conçoit pour les autres. Pour moi, Géometre assez Philosophe pour ne pas ramper, mais trop citoyen pour affecter l'independance; ce n'est, MONSIEUR, ni à vos titres, ni à votre dignité, ni à votre crédit, ni à votre fortune, que j'offre ce foible fruit de mes veilles. C'est à vous, MONSIEUR, que je le présente; à vous dont le suffrage me sera le plus flateur; & de qui je me ferai toujours honneur d'être autant par sentiment que par devoir,

MONSIEUR,

Le très-humble & très-obéissant serviteur, AUDIERNE.

EXPLICATION *des Signes dont on se sert dans ce Traité.*

Pour ne point couper le discours par les Citations, nous nous sommes servi de quelques expressions abrégées qui signifient : sçavoir....

[E] *Par le Livre & par la Proposition d'Euclide que l'on indique à la marge.*

[N] *Par le Numero de ce Traité indiqué à la marge.*

[N§] *Par la Note du Numero de ce Traité indiqué à la marge.*

[H] *Par l'hypothése.*

[C] *Par la Construction.*

[D] *Par ce qui vient d'être démontré dans la même Proposition dont il s'agit.*

TRAITE'

TABLES

CITÉES

DANS CE TRAITÉ.

TABLES des Sinus, des Tangentes,

o. Degré.

Minutes.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangent.
0.	0.	0.	0.	0.
1.	29.09.	29.09.	6.4637261.	6.4637261.
2.	58.18.	58.18.	6.7647561.	6.7647562.
3.	87.27.	85.27.	6.9408473	6.9408475.
4.	116.36.	116.36.	7.0657860.	7.0657863.
5.	145.44.	145.44.	7.1626960.	7.1626964.
6.	174.53.	174.53.	7.2418771.	7.2418778.
7.	203.62.	203.62.	7.3088239.	7.3088248.
8.	232.71.	232.71.	7.3668157.	7.3668169.
9.	261.80.	261.80.	7.4179681.	7.4179696.
10.	290.89.	290.89.	7.4637255.	7.4637273.
11.	319.98.	319.98.	7.5051181.	7.5051203.
12	349.06.	349.07.	7.5429065	7.5429091
13.	378.15	378.16.	7.5776684.	7.5776715.
14.	407.24.	407.25.	7.7098530.	7.6098566.
15.	436.33.	436.33.	7.6398160.	7.6398201.
16.	465.42.	465.42.	7.6678445.	7.6678492.
17.	494.51.	494.51.	7.6941733.	7.6941786.
18.	523.60.	523.60.	7.7189966.	7.7190026.
19.	552.68.	552.69.	7.7424775.	7.7424841.
20.	581.77.	581.78.	7.7647537.	7.7647610
21.	610.86.	610.87.	7.7859427.	7.7859508.
22.	639.95.	639.96.	7.8061458.	7.8061547.
23.	669.04.	669.05.	7.8254507.	7.8254604.
24.	698.13.	698.14.	7.8439338.	7.8439444.
25.	727.21.	727.23.	7.8616623.	7.8616738.
26.	756.30.	756.32.	7 8786953.	7.8787077
27.	785.39.	785.41.	7.8950864.	7.8950988
28.	814.48.	814.50.	7.9108793.	7.9108938
29.	843.57.	843.60.	7.9261190.	7.9261344
30.	872.65.	872.69.	7.9408419.	7.9408584

89 Degrés.

Minutes.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes. des Sinus.	Logarithmes des Tangentes
60.	100000. 00.	Infinie.	10. 0000000.	Infini.
59.	99999. 99.	3437746. 67.	9. 9999999	13. 5362739.
58.	99999. 98.	1718873. 19.	9. 9999999.	13. 2352438.
57.	99999. 96.	1145915. 30.	9. 9999998	13. 0591525.
56.	99999. 93.	859436. 30.	9. 9999997.	12. 9342137.
55.	99999. 89.	687548. 87	9. 9999995.	12. 8373036.
54.	99999. 85.	572957. 21.	9. 9999993	12. 7581222.
53.	99999. 79.	491106. 00.	9. 9999991.	12. 6911752.
52.	99999. 73.	429717. 57.	9. 9999988.	12. 6331831.
51.	99999. 66.	381970. 99.	9. 9999985.	12. 5800304.
50.	99999. 58.	343773. 71.	9. 9999982.	12. 5362727.
49.	99999. 49.	312521. 37.	9. 9999978.	12. 4948798.
48.	99999. 39.	286477. 73.	9. 9999974.	12. 4570909.
47.	99999. 28.	264440. 80.	9. 9999969.	12. 4225285.
46.	99999. 17.	245551. 98.	9. 9999964.	12. 3901434.
45.	99999. 05.	229181. 66.	9. 9999959.	12. 3601799.
44.	99998. 92.	214857. 62.	9. 9999953	12. 3321508.
43.	99998. 78.	202218. 75.	9. 9999947.	12. 3058214.
42	99998. 63.	190984. 19.	9. 9999940	12. 2809974.
41.	99998. 47.	180932. 20.	9. 9999934	12. 2575159.
40.	99998. 37.	171885. 40.	9. 9999927	12. 2352190.
39.	99998. 13.	163700. 19.	9. 9999919.	12. 2140492.
38.	99997. 95.	156259. 08.	9. 9999911.	12. 1938453.
37.	99997. 76.	149465. 01.	9. 9999903.	12. 1745396.
36.	99997. 56.	143237. 12.	9. 9999894.	12. 1560556.
35	99997. 36.	137507. 45.	9. 9999885.	12. 1383262.
34.	99997. 14.	132218. 51.	9. 9999876.	12. 1212923.
33.	99996. 92.	127321. 34.	9. 9999866.	12. 1049012.
32.	99996. 68.	122773. 56.	9. 9999856.	12. 0891062.
31.	99996. 44.	118540. 18.	9. 9999845.	12. 0738656.
30.	99996. 19.	114588. 65.	9. 9999835.	12. 0591416.

TABLES des Sinus, des Tangentes,

o. Degré.

Minutes.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangent.
0.	0.	0.	0.	0.
1.	29.09.	29. 09.	6. 4637261.	6. 4637261.
2.	58. 18.	58. 18.	6. 7647561.	6. 7647562.
3.	87. 27.	85. 27.	6. 9408473.	6. 9408475.
4.	116. 36.	116. 36.	7. 0657860.	7. 0657863.
5.	145. 44.	145. 44.	7. 1626960.	7. 1626964.
6.	174. 53.	174. 53.	7. 2418771.	7. 2418778.
7.	203. 62.	203. 62.	7. 3088239.	7. 3088248.
8.	232. 71.	232. 71.	7. 3668157.	7. 3668169.
9.	261. 80.	261. 80.	7. 4179681.	7. 4179696.
10.	290. 89.	290. 89.	7. 4637255.	7. 4637273.
11.	319. 98.	319. 98.	7. 5051181.	7. 5051203.
12.	349. 06.	349. 07.	7. 5429065	7. 5429091
13.	378. 15.	378. 16.	7. 5776684.	7. 5776715.
14.	407. 24.	407. 25.	7. 7098530.	7. 6098566.
15.	436. 33.	436. 33.	7. 6398160.	7. 6398201.
16.	465. 42.	465. 42.	7. 6678445.	7. 6678492.
17.	494. 51.	494. 51.	7. 6941733.	7. 6941786.
18.	523. 60.	523. 60.	7. 7189966.	7. 7190026.
19.	552. 68.	552. 69.	7. 7424775.	7. 7424841.
20.	581. 77.	581. 78.	7. 7647537.	7. 7647610
21.	610. 86.	610. 87.	7. 7859427.	7. 7859508.
22.	639. 95.	639. 96.	7. 8061458.	7. 8061547.
23.	669. 04.	669. 05.	7. 8254507.	7. 8254604.
24.	698. 13.	698. 14.	7. 8439338.	7. 8439444.
25.	727. 21.	727. 23.	7. 8616623.	7. 8616738.
26.	756. 30.	756. 32.	7. 8786953.	7. 8787077
27.	785. 39.	785. 41.	7. 8950864.	7. 8950988
28.	814. 48.	814. 50.	7. 9108793.	7. 9108938
29.	843. 57.	843. 60.	7. 9261190.	7. 9261344
30.	872. 65.	872. 69.	7. 9408419.	7. 9408584

89 Degrés.

Minutes.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangentes
60.	100000.00.	*Infinie.*	10. 0000000.	*infini.*
59.	99999.99.	3437746.67.	9. 9999999	13. 5362739.
58.	99999.98.	1718873.19.	9. 9999999.	13. 2352438.
57.	99999.96.	1145915.30.	9. 9999998	13. 0591525.
56.	99999.93.	859436.30.	9. 9999997.	12. 9342137.
55.	99999.89.	687548.87	9. 9999995.	12. 8373036.
54.	99999.85.	572957.21.	9. 9999993	12. 7581222.
53.	99999.79.	491106.00.	9. 9999991.	12. 6911752.
52.	99999.73.	429717.57.	9. 9999988.	12. 6331831.
51.	99999.66.	381970.99.	9. 9999985.	12. 5820304.
50.	99999.58.	343773.71.	9. 9999982.	12. 5362727.
49.	99999.49.	312521.37.	9. 9999978.	12. 4948798.
48.	99999.39.	286477.73.	9. 9999974.	12. 4570909.
47.	99999.28.	264440.80.	9. 9999969.	12. 4223285.
46.	99999.17.	245551.98.	9. 9999964.	12. 3901434.
45.	99999.05.	229181.66.	9. 9999959.	12. 3601799.
44.	99998.92.	214857.62.	9. 9999953	12. 3321508.
43.	99998.78.	202218.75.	9. 9999947.	12. 3058214.
42	99998.63.	190984.19.	9. 9999940	12. 2809974.
41.	99998.47.	180932.20.	9. 9999934	12. 2575159.
40.	99998.37.	171885.40.	9. 9999927	12. 2352390.
39.	99998.13.	167700.19.	9. 9999919.	12. 2140492.
38.	99997.95.	156259.08.	9. 9999911.	12. 1938453.
37.	99997.76.	149465.01.	9. 9999903.	12. 1745396.
36.	99997.56.	143237.12.	9. 9999894.	12. 1560556.
35	99997.36.	137507.45.	9. 9999885.	12. 1383262.
34.	99997.14.	132218.51.	9. 9999876.	12. 1212923.
33.	99996.92.	127321.34.	9. 9999866.	12. 1049012.
32.	99996.68.	122773.56.	9. 9999856.	12. 0891062.
31.	99996.44.	118540.18.	9. 9999845.	12. 0738656.
30.	99996.19.	114588.65.	9. 9999835.	12. 0591416.

TABLE
DES LOGARITHMES.

Nombres naturels.	Logarithm.	Nombres naturels.	Logarithm.	Nombres naturels.	Logarithm.
1.	0. 0000000.	35.	1. 5440680.	68.	1. 8325089.
2.	0. 3010300.	36.	1. 5563025.	69.	1. 8388491.
3.	0. 4771213.	37.	1. 5682017.	70.	1. 8450980.
4.	0. 6020600.	38.	1. 5797836.	71.	1. 8512583.
5.	0. 6989700.	39.	1. 5910646.	72.	1. 8573325.
6.	0. 7781513.	40.	1. 6020600.	73.	1. 8633229.
7.	0. 8450980.	41.	1. 6127839.	74.	1. 8692317.
8.	0. 9030900.	42.	1. 6232493.	75.	1. 8750613.
9.	0. 9542425.	43.	1. 6334685.	76.	1. 8808136.
10.	1. 0000000.	44.	1. 6434527.	77.	1. 8864907.
11.	1. 0413927.	45.	1. 6532125.	78.	1. 8920946.
12.	1. 0791812.	46.	1. 6627578.	79.	1. 8976271.
13.	1. 1139434.	47.	1. 6720979.	80.	1. 9030900.
14.	1. 1461280.	48.	1. 6812412.	81.	1. 9084850.
15.	1. 1760913.	49.	1. 6901961.	82.	1. 9138139.
16.	1. 2041200.	50.	1. 6989700.	83.	1. 9190781.
17.	1. 2304489.	51.	1. 7075702.	84.	1. 9242793.
18.	1. 2552725.	52.	1. 7160033.	85.	1. 9294189.
19.	1. 2787536.	53.	1. 7242759.	86.	1. 9344984.
20.	1. 3010300.	54.	1. 7323938.	87.	1. 9395193.
21.	1. 3222193.	55.	1. 7403627.	88.	1. 9444827.
22.	1. 3424227.	56.	1. 7481880.	89.	1. 9493900.
23.	1. 3617278.	57.	1. 7558749.	90.	1. 9542425.
24.	1. 3802112.	58.	1. 7634280.	91.	1. 9590414.
25.	1. 3979400.	59.	1. 7708520.	92.	1. 9637878.
26.	1. 4149733.	60.	1. 7781513.	93.	1. 9684829.
27	1. 4313638.	61.	1. 7853298.	94.	1. 9731279.
28.	1. 4471580	62.	1. 7923917.	95.	1. 9777236.
29.	1. 4623980	63.	1. 7993405.	96.	1. 9822712.
30.	1. 4771213	64.	1. 8061800.	97.	1. 9867717.
31.	1. 4913617.	65.	1. 8129134.	98.	1. 9912261.
32.	1. 5051500.	66.	1. 8195439.	99.	1. 9956352.
33	1. 5185139.	67.	1. 8260748.	100.	2. 0000000.
34.	1. 5314789.				

TABLE
DES LOGARITHMES.

Nombres naturels.	Logarithm.	Nombres naturels.	Logarithm.	Nombres naturels.	Logarithm.
101.	2. 0043214.	135.	2. 1303338.	168.	2. 2253093
102.	2. 0086002.	136.	2. 1335389.	169.	2. 2278868
103.	2. 0128372.	137.	2. 1367206.	170.	2. 2304489
104.	2. 0170333.	138.	2. 1398791.	171.	2. 2329961
105.	2. 0211893.	139.	2. 1430148.	172.	2. 2355284
106.	2. 0253059.	140.	2. 1461280.	173.	2. 2380461
107.	2. 0293838.	141.	2. 1492191.	174.	2. 2405492
108.	2. 0334238.	142.	2. 1522883.	175.	2. 2430380
109.	2. 0374265.	143.	2. 1553360.	176.	2. 2455127
110.	2. 0413927.	144.	2. 1583625.	177.	2. 2479733
111.	2. 0453230.	145.	2. 1613680.	178.	2. 2504200
112.	2. 0492180.	146.	2. 1643529.	179.	2. 2528530
113.	2. 0530784.	147.	2. 1673173.	180.	2. 2552725
114.	2. 0569049.	148.	2. 1702617.	181.	2. 2576786
115.	2. 0606978.	149.	2. 1731863.	182.	2. 2600714
116.	2. 0644580.	150.	2. 1760913.	183.	2. 2624511
117.	2. 0681859.	151.	2. 1789769.	184.	2. 2648178
118.	2. 0718820.	152.	2. 1818436.	185.	2. 2671717
119.	2. 0755470.	153.	2. 1846914.	186.	2. 2695129
120.	2. 0791812.	154.	2. 1875207.	187.	2. 2718416
121.	2. 0827854.	155.	2. 1903317.	188.	2. 274157
122.	2. 0863598.	156.	2. 1931246.	189.	2. 276461
123.	2. 0899051.	157.	2. 1958997.	190.	2. 27875
124.	2. 0934217.	158.	2. 1986571.	191.	2. 28103
125.	2. 0969100.	159.	2. 2013971.	192.	2. 283301
126.	2. 1003705.	160.	2. 2041200.	193.	2. 28555
127.	2. 1038037.	161.	2. 2068259.	194.	2. 287801
128.	2. 1072100.	162.	2. 2095150.	195.	2. 29003
129.	2. 1105897.	163.	2. 2121876.	196.	2. 29225
130.	2. 1139434.	164.	2. 2148438.	197.	2. 29446
131.	2. 1172713.	165.	2. 2174839.	198.	2. .96665
132.	2. 1205739.	166.	2. 2201081.	199.	2. 298873
133.	2. 1238516.	167.	2. 2227165.	200.	2. 301030
134.	2. 1271048.				

Table des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithme du nombre 2. [Les lettres A, B, C, &c. indiquent l'ordre des Opérations.]

	Nomb. nat.	Logarithmes.		Nomb. nat.	Logarithmes.
A.	1.	0. 0000000.	O.	1. 9999785.	0. 30102539.
C.	3. $\frac{1622776}{10000000}$.	0. 5000000.	Q.	2. 0002595.	0. 30108642.
B.	10.	1. 0000000.	P.	2. 0005407.	0. 30114746.
A.	1.	0. 0000000.	O.	1. 9999785.	0. 30102539.
D.	1. 7782793.	0. 2500000.	R.	2. 0001189.	0. 30105590.
C.	3. 1622776.	0. 5000000.	Q.	2. 0002595.	0. 30108642.
D.	1. 7782793.	0. 2500000.	O.	1. 9999785.	0. 30102539.
E.	2. 3713736.	0. 3750000.	S.	2. 0000486.	0. 30104064.
C.	3. 1622776.	0. 5000000.	R.	2. 0001189.	0. 30105590.
D.	1. 7782793.	0. 2500000.	O.	1. 9999785.	0. 30102539.
F.	2. 0535249.	0. 3125000.	T.	2. 0000135.	0. 30103301
E.	2. 3713736.	0. 3750000.	S.	2. 0000486.	0. 30104064
D.	1. 7782793.	0. 2500000.	O.	1. 9999785.	0. 30102539.
G.	1. 9109528.	0. 28125000.	V.	1. 9999959.	0. 30102920.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.	T.	2. 0000135.	0. 30103301.
G.	1. 9109528.	0. 28125000.	V.	1. 9999959.	0. 30102920.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.	X.	2. 0000046.	0. 30103110.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.	T.	2. 0000135.	0. 30103301.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.	V.	1. 9999959.	0. 30102920.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.	X.	2. 0000046.	0. 30103110.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.	V.	1. 9999959.	0. 30102920.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.	Z.	1. 9999980.	0. 30102967.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.	Z.	1. 9999980.	0. 30102967.
L.	2. 0078641.	0. 30273437.	AA.	1. 9999990.	0. 30102991.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.	AA.	1. 9999990.	0. 30102991.
M.	2. 0033542.	0. 30175781.	BB.	1. 9999995.	0. 30103003.
L.	2. 0078641.	0. 30273437.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.	BB.	1. 9999995.	0. 30103003.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.	CC.	1. 9999998.	0. 30103009.
M.	2. 0033542.	0. 30175781.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015
K.	1. 9988546	0. 30078125.	CC.	1. 9999998.	0. 30103009
O.	1. 9999785.	0. 30102539.	DD.	1. 9999999.	0. 30103012.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
O.	1. 9999785	0. 30102539.	DD.	1. 9999999.	0. 30103012.
P.	2. 0005407.	0. 30114746.	EE.	2. 0000000.	0. 30103013.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.	Y.	2. 0000002.	0. 30103015.

TABLE

Des Nombres Premiers compris entre 1. & 1800.

1.	173.	409.	659.	941.	1223.	1511.
2.	179.	419.	661.	947.	1229	1523.
3.	181.	421.	673.	953.	1231.	1531.
5.	191.	431.	677.	967.	1237.	1543.
7.	193.	433.	683.	971.	1249.	1549.
11.	197.	439.	691.	977.	1259.	1553.
13.	199.	443.	701.	983.	1277.	1559.
17.	211.	449.	709.	991.	1279.	1567.
19.	223.	457.	719.	997.	1283.	1571.
23.	227.	461.	727.	1009.	1289.	1579.
29.	229.	463.	733.	1013.	1291.	1583.
31.	233.	467.	739.	1019.	1297.	1597.
37.	239.	479.	743.	1021.	1301.	1601.
41.	241.	487.	751.	1031.	1303.	1607.
43.	251.	491.	757.	1033.	1307.	1609.
47.	257.	499.	761.	1039.	1319.	1613.
53.	263.	503.	769.	1049.	1321.	1619.
59.	269.	509.	773.	1051.	1327.	1621.
61.	271.	521.	787.	1061.	1361.	1627.
67.	277.	523.	797.	1063.	1367.	1637.
71.	281.	541.	809.	1069.	1373.	1657.
73.	283.	547.	811.	1087.	1381.	1663.
79.	293.	557.	821.	1091.	1399.	1667.
83.	307.	563.	823.	1093.	1409.	1669.
89.	311.	569.	827.	1097.	1423.	1693.
97.	313.	571.	829.	1103.	1427.	1697.
101.	317.	577.	839.	1109.	1429.	1699.
103.	331.	587.	853.	1117.	1433.	1709.
107.	337.	593.	857.	1123.	1439.	1721.
109.	347.	599.	859.	1129.	1447.	1723.
113.	349.	601.	863.	1151.	1451.	1733.
127.	353.	607.	877.	1153.	1453.	1741.
131.	359.	613.	881.	1163.	1459.	1747.
137.	367.	617.	883.	1171.	1471.	1753.
139.	373.	619.	887.	1181.	1481.	1759.
149.	379.	631.	907.	1187.	1483.	1777.
151.	383.	641.	911.	1193	1487.	1783.
157.	389.	643.	919.	1201.	1489.	1787.
163.	397.	647.	929.	1213.	1493.	1789.
167.	401.	653.	937.	1217.	1499.	1801.

Table des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithme du nombre 2. [Les lettres A, B, C, &c. indiquent l'ordre des Opérations.]

	Nomb. nat.	Logarithmes.
A.	1.	0. 00000000.
C.	3. 1622776/10000000.	0. 50000000.
B	10.	1. 00000000.
A.	1.	0. 00000000.
D.	1. 7782793.	0. 25000000.
C.	3. 1622776.	0. 50000000.
D.	1. 7782793.	0. 25000000.
E.	2. 3713736.	0. 37500000.
C.	3. 1622776.	0. 50000000.
D.	1. 7782793.	0. 25000000.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.
E.	2. 3713736.	0. 37500000.
D.	1. 7782793.	0. 25000000.
G.	1. 9109528.	0. 28125000.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.
G.	1. 9109528.	0. 28125000.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.
F.	2. 0535249.	0. 31250000.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.
F.	2. 0535249	0. 31250000.
H.	1. 9809566.	0. 29687500.
K.	1. 9988546	0. 30078125.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.
L.	2. 0078641.	0. 30273437.
I.	2. 0169144.	0. 30468750.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.
M.	2. 0033542.	0. 30175781.
L.	2. 0078641.	0. 30273437.
K.	1. 9988546.	0. 30078125.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.
M.	2. 0033542.	0. 30175781.
K.	1. 9988546	0. 30078125.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.
O.	1. 9999785	0. 30102539.
P.	2. 0005407.	0. 30114746.
N.	2. 0011031.	0. 30126953.

	Nomb. nat.	Logarithmes.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
Q.	2. 0002595.	0. 30108642.
P.	2. 0005407.	0. 30114746.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
R.	2. 0001189.	0. 30105590.
Q.	2. 0002595.	0. 30108642.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
S.	2. 0000486.	0. 30104064.
R.	2. 0001189.	0. 30105590.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
T.	2. 0000135.	0. 30103301.
S.	2. 0000486.	0. 30104064.
O.	1. 9999785.	0. 30102539.
V.	1. 9999959.	0. 30102920.
T.	2. 0000135.	0. 30103301.
V.	1. 9999959.	0. 30102920.
X.	2. 0000046.	0. 30103110.
T.	2. 0000135.	0. 30103301.
V.	1. 9999959.	0. 30102920.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
X.	2. 0000046.	0. 30103110.
V.	1. 9999959.	0. 30102920.
Z.	1. 9999980.	0. 30102967.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
Z.	1. 9999980.	0. 30102967.
AA.	1. 9999990.	0. 30102991.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
AA.	1. 9999990.	0. 30102991.
BB.	1. 9999995.	0. 30103003.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
BB.	1. 9999995.	0. 30103003.
CC.	1. 9999998.	0. 30103009.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015
CC.	1. 9999998.	0. 30103009
DD.	1. 9999999.	0. 30103012.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.
DD.	1. 9999999.	0. 30103012.
EE.	2. 0000000.	0. 30103013.
Y.	2. 0000002.	0. 30103015.

TABLE

Des Nombres Premiers compris entre 1. & 1800.

1.	173.	409.	659.	941.	1223.	1511.
2.	179.	419.	661.	947.	1229	1523.
3.	181.	421.	673.	953.	1231.	1531.
5.	191.	431.	677.	967.	1237.	1543.
7.	193.	433.	683.	971.	1249.	1549.
11.	197.	439.	691.	977.	1259.	1553.
13.	199.	443.	701.	983.	1277.	1559.
17.	211.	449.	709.	991.	1279.	1567.
19.	223.	457.	719.	997.	1283.	1571.
23.	227.	461.	727.	1009.	1289.	1579.
29.	229.	463.	733.	1013.	1291.	1583.
31.	233.	467.	739.	1019.	1297.	1597.
37.	239.	479.	743.	1021.	1301.	1601.
41.	241.	487.	751.	1031.	1303.	1607.
43.	251.	491.	757.	1033.	1307.	1609.
47.	257.	499.	761.	1039.	1319.	1613.
53.	263.	503.	769.	1049.	1321.	1619.
59.	269.	509.	773.	1051.	1327.	1621.
61.	271.	521.	787.	1061.	1361.	1627.
67.	277.	523.	797.	1063.	1367.	1637.
71.	281.	541.	809.	1069.	1373.	1657.
73.	283.	547.	811.	1087.	1381.	1663.
79.	293.	557.	821.	1091.	1399.	1667.
83.	307.	563.	823.	1093.	1409.	1669.
89.	311.	569.	827.	1097.	1423.	1693.
97.	313.	571.	829.	1103.	1427.	1697.
101.	317.	577.	839.	1109.	1429.	1699.
103.	331.	587.	853.	1117.	1433.	1709.
107.	337.	593.	857.	1123.	1439.	1721.
109.	347.	599.	859.	1129.	1447.	1723.
113.	349.	601.	863.	1151.	1451.	1733.
127.	353.	607.	877.	1153.	1453.	1741.
131.	359.	613.	881.	1163.	1459.	1747.
137.	367.	617.	883.	1171.	1471.	1753.
139.	373.	619.	887.	1181.	1481.	1759.
149.	379.	631.	907.	1187.	1483.	1777.
151.	383.	641.	911.	1193	1487.	1783.
157.	389.	643.	919.	1201.	1489.	1787.
163.	397.	647.	929.	1213.	1493.	1789.
167.	401.	653.	937.	1217.	1499.	1801.

TABLE

Des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithm du Nombre 54059.

	Nombr. naturels.	Logarithm.
A.	54058.	4.7328599.
C.	54058. $\frac{9999907}{10000000}$.	4.7328679.
B.	54060.	4.7328760.
B.	54060.	4.7328760.
D.	54059.4999930.	4.7328719.
C.	54058.9999907.	4.7328679.
C.	54058.9999907.	4.7328679.
E.	54059.2499912.	4.7328699.
D.	54059.4999930.	4.7328719.
C.	54058.9999907.	4.7328679.
F.	54059.1249908.	4.7328689.
E.	54059.2499912.	4.7328699.
C.	54058.9999907.	4.7328679.
G	54059.0624907.	4.7328684,
F.	54059.1249908.	4.7328689.
C.	54058.9999907.	4.7328679
H.	54059.0312406.	4.7328681.
G.	54059.0624907.	4.7328684.
C.	54058.9999907.	4.7328679.
I.	54059.0156156.	4.7328680.
H.	54059.0312406.	4.7328681.

TABLE

Pour réduire en Temps les Parties

DE L'EQUATEUR.

Deg.	Heur.	Min.	Deg.	Heur.	Min.	Degrés.	Heures.	Minutes.
Min.	Min.	Sec.	Min.	Min.	Sec.			
Sec.	Sec.	Tierc.	Sec.	Sec.	Tierc.			
1.	0.	4.	31.	2.	4.	70.	4.	40.
2.	0.	8.	32.	2.	8.	80.	5.	20.
3.	0.	12.	33.	2.	12.	90.	6.	0.
4.	0.	16.	34.	2.	16.	100.	6.	40.
5.	0.	20.	35.	2.	20.	110.	7.	20.
6.	0.	24.	36.	2.	24.	120.	8.	0.
7.	0.	28.	37.	2.	28.	130.	8.	40.
8.	0.	32.	38.	2.	32.	140	9.	20.
9.	0.	36.	39.	2.	36.	150.	10.	0.
10.	0.	40.	40.	2.	40.	160.	10.	40.
11.	0.	44.	41.	2.	44.	170.	11.	20.
12.	0.	48.	42.	2.	48.	180.	12.	0.
13.	0.	52.	43.	2.	52.	190.	12.	40.
14.	0.	56.	44.	2.	56.	200.	13.	20.
15.	1.	0.	45.	3.	0.	210.	14.	0.
16.	1.	4.	46.	3.	4.	220.	14.	40.
17.	1.	8.	47.	3.	8.	230.	15.	20.
18.	1.	12.	48.	3.	12.	240.	16.	0.
19.	1.	16.	49.	3.	16.	250.	16.	40.
20.	1.	20.	50.	3.	20.	260	17.	20.
21.	1.	24.	51.	3.	24.	270.	18.	0.
22.	1.	28.	52.	3.	28.	280.	18.	40.
23.	1.	32.	53.	3.	32.	290.	19.	20.
24.	1.	36.	54.	3	36.	300.	20.	0.
25.	1.	40.	55.	3.	40.	310.	20.	40.
26.	1.	44.	56.	3.	44.	320.	21.	20.
27.	1.	48.	57.	3.	48.	330.	22.	0.
28.	1.	52.	58.	3.	52.	340.	22.	40.
29.	1.	56	59.	3.	56.	350.	23.	20.
30.	2.	0.	60.	4.	0.	360.	24	0.

TABLE

Pour réduire le Temps en Parties

DE L'EQUATEUR.

Heures.	Degrés.	Min. / Sec. / Tierc.	Deg. / Min. / Sec.	Min. / Sec. / Tierc.	Min. / Sec. / Tierc.	Deg. / Min. / Sec.	Min. / Sec. / Tierc.
1.	15.	1.	0.	15.	31.	7.	45.
2.	30.	2.	0.	30.	32.	8.	0.
3.	45.	3.	0.	45.	33.	8.	15.
4.	60.	4.	1.	0.	34.	8.	30.
5.	75.	5.	1.	15.	35.	8.	45.
6.	90.	6.	1.	30.	36.	9.	0.
7.	105.	7.	1.	45.	37.	9.	15.
8.	120.	8.	2.	0.	38.	9.	30.
9.	135.	9.	2.	15.	39.	9.	45.
10.	150.	10.	2.	30.	40.	10.	0.
11.	165.	11.	2.	45.	41.	10.	15.
12.	180.	12.	3.	0.	42.	10.	30.
13.	195.	13.	3.	15.	43.	10.	45.
14.	210.	14.	3.	30.	44.	11.	0.
15.	225.	15.	3.	45.	45.	11.	15.
16.	240.	16.	4.	0.	46.	11.	30.
17.	255.	17.	4.	15.	47.	11.	45.
18.	270.	18.	4.	30.	48.	12.	0.
19.	285.	19.	4.	45.	49.	12.	15.
20.	300.	20.	5.	0.	50.	12.	30.
21.	315.	21.	5.	15.	51.	12.	45.
22.	330.	22.	5.	30.	52.	13.	0.
23.	345.	23.	5.	45.	53.	13.	15.
24.	360.	24.	6.	0.	54.	13.	30.
25.	375.	25.	6.	15.	55.	13.	45.
26.	390.	26.	6.	30.	56.	14.	0.
27.	405.	27.	6.	45.	57.	14.	15.
28.	420.	28.	7.	0.	58.	14.	30.
29.	435.	29.	7.	15.	59.	14.	45.
30.	450.	30.	7.	30.	60.	15.	0.

TABLE des Réfractions.

Haur.	Réfract.	Haur.	Réfract.	Haur.	Réfract.
0.	32.m. 20.s.	31.D.	1.m. 38.s.	61.D.	0.m. 33.s.
1.	27. 56.	32.	1. 34.	62.	0. 31.
2.	21. 4.	33.	1. 30.	63.	0. 30.
3.	16. 6.	34.	1. 27.	64.	0. 28.
4.	12. 48.	35.	1. 23.	65.	0. 27.
5.	10. 32.	36.	1. 20.	66.	0. 26.
6.	8. 55.	37.	1. 18.	67.	0. 25.
7.	7. 44.	38.	1. 15.	68.	0. 24.
8.	6. 47.	39.	1. 12.	69.	0. 22.
9.	6. 4.	40.	1. 10.	70.	0. 21.
10.	5. 28.	41.	1. 7.	71.	0. 20.
11.	4. 58.	42.	1. 5.	72.	0. 19.
12.	4. 32.	43.	1. 3.	73.	0. 18.
13.	4. 12.	44.	1. 1.	74.	0. 17.
14.	3. 54.	45.	0. 59.	75.	0. 16.
15.	3. 38.	46.	0. 58.	76.	0. 14.
16.	3. 24.	47.	0. 56.	77.	0. 13.
17.	3. 11.	48.	0. 54.	78.	0. 12.
18.	3. 0.	49.	0. 52.	79.	0. 11.
19.	2. 49.	50.	0. 50.	80.	0. 10.
20.	2. 39.	51.	0. 49.	81.	0. 9.
21.	2. 31.	52.	0. 47.	82.	0. 8.
22.	2. 25.	53.	0. 45.	83.	0. 7.
23.	2. 18.	54.	0. 43.	84.	0. 6.
24.	2. 12.	55.	0. 41.	85.	0. 5.
25.	2. 6.	56.	0. 40.	86.	0. 4.
26.	2. 0.	57.	0. 38.	87.	0. 3.
27.	1. 55.	58.	0. 37.	88.	0. 2.
28.	1. 51.	59.	0. 35.	89.	0. 1.
29.	1. 46.	60.	0. 34.	90.	0. 0.
30.	1. 42.				

Table des Parallaxes du Soleil.

Haut.	Parallaxes.
0.D.	0.m. 10.s.
10.	0. 10.
20.	0. 9.
30.	0. 9.
40.	0. 8.
50.	0. 6.
60.	0. 5.
70.	0. 3.
80.	0. 2.
90.	0. 0.

Table de la Grandeur, de la Distance & de la Révolution de chaque Planette.

Noms des Planettes.	Diamétres des Planettes,	Distances des Planettes au Soleil. Plus grande.	Plus petite.	Révolutions des Plan. sur leurs Axes.	Révolutions des Planettes autour du Soleil.
Le Soleil.	100 diam. de la T.	0 0 0	0 0 0	25 j. 12 h.	0 0 0
Mercure.	1/3 du diam. de la T.	10274 di. de la T.	6754 di. de la T.	Inconnue.	88 jours.
Venus.	Egale à la Terre.	16016.	15796.	23 h. 20 m.	224 j. 18. h.
La Terre.	2865 lieuës.	22374.	21626.	23 h. 56 m.	365 j. 5 h. 48. m.
La Lune.	1/4 du di. de la Terr.	Dist. à la Terre. 31 di. de la T. Dist. au Soleil.	Dist. à la Terre. 27 di. de la T. Dist. au Soleil.	27 jours.	29 j. 12 h.
Mars.	1/5 du di. de la Terr.	36630.	30426.	24 h. 40 m.	1 an 321 j. 22 h.
Jupiter.	10 di. de la T. *p. p.*	119900.	108900.	9 h. 56 m.	11 ans 313 jours.
Saturne.	10 di. de la T. *p. m.*	221870.	197802.	Inconnue.	29 ans 155 jours.

TRAITÉ COMPLET
DE TRIGONOMETRIE.

ON donne le nom de *Trigonométrie* à la ſcience de meſurer les Angles & les Côtés des Triangles qui peuvent être ſoumis à des principes conſtans ; & comme ces Triangles ſont ou rectilignes ou ſphériques, on diviſe la Trigonométrie en *Trigonométrie-rectiligne*, & en *Trigonométrie-ſphérique*. Je me propoſe ici de traiter de chacune en particulier, après que j'aurai enſeigné l'Origine, la Conſtruction, & l'Uſage des Tables qui ſont néceſſaires pour la pratique de cette ſcience.

LIVRE PREMIER.

De l'Origine, de la Conſtruction, & de l'Uſage des Tables qui ſont néceſſaires pour la pratique de la Trigonometrie.

SECTION PREMIERE.
DES SINUS.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table de Sinus.

No. 1. LORSQUE l'on connoît chaque angle d'un triangle † quelconque ABC *, il eſt toujours poſſible d'inſcrire dans un cercle * Fig. 1.

† Ce que nous diſons des triangles dans le premier livre & dans le ſecond, ne doit s'entendre que des triangles rectilignes.

quelconque Z un triangle DEF équiangle à
(a) E. l. 4. p. 2. ce triangle ABC (*a*). Et comme les côtés DE DF, & FE d'un triangle qui est inscrit dans un cercle, deviennent des cordes de ce même cercle, qui tendent des arcs doubles de ceux
(b) E. l. 3. p. 20. qui sont les mesures des angles de ce triangle (*b*); si l'on avoit une Table des valeurs de toutes les cordes d'un cercle quelconque Z dont on auroit supposé le diamétre divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque ABC, on trouveroit facilement celle de chaque côté d'un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC. Car en cherchant dans cette Table la valeur de la corde qui soûtendroit un arc double de celui qui seroit la mesure de l'Angle A égal à l'angle D, on auroit la valeur du côté EF de ce triangle; en cherchant de même la valeur de la corde qui soûtendroit un arc double de celui qui seroit la mesure de l'angle B égal à l'angle E, on auroit la valeur du côté DF; en cherchant enfin la valeur de la corde qui soûtendroit un arc double de celui qui seroit la mesure de l'angle C égal à l'angle F, on auroit la valeur du côté DE. Or, lorsque deux triangles sont équiangles, & que l'on connoit chaque côté de l'un avec l'un des côtés de l'autre, on peut trouver par la régle de proportion chacun
(c) E. l. 6. p. 4. des deux côtés inconnus. (*c*) Donc, si l'on connois-

soit aussi l'un des côtés du triangle ABC, on trouveroit par la régle de proportion chacun de ses autres côtés.

2. RECIPROQUEMENT, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque DEF inscrit dans le même cercle précédent Z, on trouveroit par le moyen de cette même Table, la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque A B C équiangle à ce triangle DEF; puisqu'en cherchant dans cette Table de quel arc le côté EF seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc EMF double de celui qui seroit la mesure de l'angle D égal à l'angle A de ce triangle ABC: qu'en cherchant de même de quel arc le côté DF seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc DLF double de celui qui seroit la mesure de l'angle E égal à l'angle B: & qu'en cherchant enfin de quel arc le côté DE seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc DKE double de celui qui seroit la mesure de l'angle F égal à l'angle C.

Ainsi, lorsque l'on connoîtroit la valeur de l'un quelconque A des angles d'un triangle quelconque ABC, on trouveroit (a) celle du côté E F d'un triangle D E F équiangle à ce triangle ABC & inscrit dans le cercle Z. Or, lorsque l'on connoît la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque ABC, avec celle de l'un quelconque EF, des côtés d'un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC, on trouve (a) N. 1.

par la régle de proportion la valeur de chacun des autres côtés D E & D F de ce triangle DEF (*a*). Donc, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque ABC avec celle de l'un de ses angles, on trouveroit celle de chacun de ses autres angles. †

(a) E. l. 6, p. 4.

3. Il s'agit donc de supposer que le diamétre d'un cercle quelconque Z est divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, & de chercher ensuite le nombre de ces parties qui convient à chaque corde de ce cercle, depuis celle qui soûtend l'arc d'une minute, ou même celle qui soûtend l'arc d'une seconde ¶, jusqu'à celle qui soûtend la demi-circonférence, laquelle est la plus grande de toutes (*b*), afin de construire une Table des valeurs de ces cordes, c'est-à-dire, des valeurs des côtés de tous les triangles qu'il sera possible d'inscrire dans ce cercle Z, & à quelqu'un desquels tel triangle que l'on puisse proposer, sera par conséquent

(b) E. l. 3. p. 15.

† On verra dans le second livre, que pour connoître la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque ABC *, il suffit de connoître celle de chaque côté de ce triangle, ou celle de deux de ses côtés avec celle de l'un de ses angles.

* Fig. 1.

¶ C'est pousser la précision assez loin pour la pratique, que de borner la division du cercle à des arcs d'une seconde. Ainsi l'on peut dire qu'*en ayant les valeurs de toutes les cordes d'un cercle, depuis celle qui soûtend un arc d'une seconde jusqu'à celle qui soûtend la demi-circonférence, on a les valeurs des côtés de tous les triangles qu'il est possible d'inscrire dans ce cercle*, quoiqu'il y ait effectivement des arcs qui, outre un certain nombre de degrés, de minutes & de secondes, contiennent encore des tierces, des quartes, &c. & même des parties qui sont incommensurables avec la circonférence.

équiangle. Mais comme les demi-côtés DG, DH & FI d'un triangle quelconque DEF ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés DE, DF & FE de ce même triangle (*a*), & ces côtés les mêmes rapports entr'eux que les côtés AB, AC & CB d'un triangle quelconque ABC qui est équiangle à ce triangle DEF (*b*), les demi-côtés du triangle DEF ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés du triangle ABC (*c*). Ainsi, il suffit de connoître chaque demi-côté du triangle DEF avec l'un des côtés du triangle ABC, pour trouver chacun des autres côtés de ce dernier triangle; & réciproquement, de connoître chaque côté du triangle ABC avec l'un des demi-côtés du triangle DEF, pour trouver chacun des autres demi-côtés de ce triangle DEF; & par conséquent, au lieu de construire une Table des valeurs de toutes les cordes d'un cercle, il suffit d'en construire une des valeurs des moitiés de ces cordes.

(*a*) E. l. 5. P. 15.

(*b*) E. l. 6. P. 4.

(*c*) E. l. 5. P. 11.

4. Or, ces demi-cordes, c'est-à-dire, ces demi-côtés de triangles inscrits dans un cercle Z, se nomment les *Sinus* des moitiés des arcs qui sont soûtendus par les cordes entiéres. Ainsi, la moitié DG de la corde DE est le *sinus* de la moitié DK de l'arc DKE qui est soûtendu par cette corde entiére DE. De même, la moitié DH de la corde DF est le *sinus* de la moitié DL de l'arc DLF. Enfin, la moitié FI de la corde FE est le *sinus* de la moitié FM de l'arc FME; & par conséquent on peut dire en gé-

neral, que *le Sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soûtend le double de cet arc.*

5. ENFIN, comme les côtés des triangles qui sont inscrits dans un cercle, soûtendent des arcs doubles de ceux qui sont les mesures des angles qui sont opposés à ces côtés (*a*), au lieu d'écrire dans la Table les valeurs des moitiés de ces côtés, vis-à-vis des arcs que ces côtés entiers soûtendent, on les écrit vis-à-vis des moitiés de ces arcs; & par ce moyen on s'évite la peine, premiérement, de doubler les angles donnés A, B & C dans un triangle ABC, pour chercher dans la Table les valeurs des demi-côtés du triangle DEF équiangle à ce triangle A B C; secondement, de prendre les moitiés des arcs FME, DLF & DKE qui sont soûtendus par les doubles des demi-côtés donnés FI, DH & DG dans le triangle DEF, pour avoir les valeurs des angles d'un triangle ABC équiangle à ce triangle DEF, après avoir trouvé dans la Table celles de ces arcs.

(*a*) E. l. 3. p. 20.

COROLLAIRE I.

6. Il suit de la définition des Sinus (*b*), qu'*un arc & le* supplément † *de cet arc ont le même sinus.*

(*b*) N. 4.

L'arc AB* & son supplément BC ont le même sinus BE.

* Fig. 2.

† On appelle *Supplément* d'un arc; la différence de cet arc à la moitié de la circonférence d'un cercle. Ainsi l'arc BC * est le *supplément* de l'arc AB; & réciproquement l'arc AB est celui de l'arc BC.

* Fig. 2.

Construction. Prolongez la demi-circonférence A B C jusqu'à la circonférence entiére ABCDA, & le sinus B E jusqu'à ce qu'il rencontre en un point D cette circonférence.

Démonstration. L'arc AB & son supplément BC forment ensemble la moitié ABC de la circonférence du cercle Z; ainsi le double BAD de cet arc AB & le double BCD de son supplément BC forment ensemble la circonférence entiére de ce même cercle. Mais dans un cercle qui est divisé en deux segmens, le petit arc & le grand arc sont soûtendus par une même corde; donc dans le cercle Z la même corde BED soûtend le petit arc BAD & le grand arc BCD. Or l'arc BAD est double de l'arc AB & l'arc BCD est double du supplément BC de cet arc AB; donc la même corde BED soûtend le double de l'arc AB & le double du supplément BC de cet arc A B; & par conséquent, puisque le sinus d'un arc est la moitie de la corde qui soûtend le double de cet arc (*a*), la moitié BE de cette corde BED est en même temps le sinus de l'arc AB & le sinus du supplément BC de cet arc A B. Donc C. Q. F. D. (*a*) N. 4.

COROLLAIRE II.

7. Il suit aussi de la même définition (*b*), que *le perpendiculaire qui est tirée de l'une des extrémités d'un arc au diamétre qui termine ce même arc par son autre extrémité, est le sinus de cet arc.* (*b*) N. 4.

La perpendiculaire BE * qui est tirée de l'une * Fig. 3.

B des extrémités de l'arc AB au diamétre AC qui termine ce même arc par son autre extrémité A, est le sinus de cet arc AB.

Const. Prolongez la perpendiculaire BE indéfiniment vers D, & l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre en un point D le prolongement de cette perpendiculaire.

Démonst. Puisque le diamétre AC de l'arc BAD est perpendiculaire à la corde BED [H], il divise en deux parties égales, & cette corde BED au point E (*a*), & cet arc BAD au point A (*b*). Ainsi cette corde BED soûtend un arc BAD double de l'arc AB; & par conséquent, puisque la perpendiculaire BE est la moitié de cette corde, cette perpendiculaire est le sinus de cet arc AB (*c*). Donc C. Q. F. D.

(*a*) E. l. 3. p. 3.
(*b*) E. l. 3. p. 30.
(*c*) N. 4.

COROLLAIRE III.

(*d*) N. 4.

8. Il suit enfin de la même définition (*d*), que *le sinus d'un arc de 90 degrés, c'est-à-dire, du quart de la circonférence d'un cercle, est un rayon de ce même cercle.*

Démonst. Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soûtend le double de cet arc (*e*); ainsi le sinus du quart de la circonférence d'un cercle est la moitié de la corde qui soûtend la moitié de la circonférence de ce cercle. Or la moitié de la corde qui soûtend la moitié de la circonférence d'un cercle, est un rayon de ce cercle, puisque cette corde est un diamétre de ce même cercle. Donc C. Q. F. D.

(*e*) N. 4.

Définition.

Définition.

9. Le sinus d'un arc de 90 degrés se nomme le *sinus total*.

SCHOLIE.

10. *Lorsque l'on considere un arc de cercle quelconque AB*, comme étant la mesure d'un angle C, au lieu de dire :* le sinus BD de l'arc AB qui est la mesure de l'angle C, *on dit seulement*, le sinus BD de l'angle C. *Fig. 4.

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des demi-Cordes ou des Sinus.

PROPOSITION I. Théorême.

11. *Le rectangle fait des diagonales d'un quadrilatere quelconque qui est inscrit dans un cercle, est égal à la somme des deux rectangles faits chacun des côtés opposés de ce même quadrilatere.*

Dans le quadrilatere ABCD* qui est inscrit dans le cercle Z, le rectangle fait des diagonales AC & BD est égal à la somme des rectangles faits, l'un du côté AB & du côté DC, & l'autre du côté AD & du côté BC. *Fig. 5.

Constr. Faites sur le côté AB l'angle ABE égal à l'angle DBC. (*a*) (a) E. l. 1. p. 23.

Démonstr. Les triangles ABE & DBC sont équiangles (*b*), puisque les angles ABE & (b) E. l. 1. p. 32.

B

DBC ſont égaux [c], & que les angles BAC & BDC qui s'appuient ſur le même arc BC, le
(a) E. l. 3. p. 21. ſont auſſi (a). Ainſi AE : AB : : DC : BD (b);
(b) E. l. 6. p. 4. & par conſéquent le rectangle fait de AE & de BD eſt égal au rectangle fait de AB &
(c) E. l. 6. p. 16. de DC (c).

Or, les triangles ABD & EBC ſont auſſi
(d) E. l. 1. p. 32. équiangles (d), puiſque les angles ADB & ACB qui s'appuient ſur le même arc AB, ſont égaux
(e) E. l. 3. p. 21. (e), & que les angles ABD & EBC qui ſont compoſés, l'un de l'angle EBD & de l'angle ABE, & l'autre du même angle EBD & de l'angle DBC qui eſt égal à l'angle ABE [c], ſont auſſi
(f) E. l. 6. p. 4. égaux. Ainſi AD : BD : : EC : BC (f); & par conſéquent le rectangle fait de EC & de BD eſt égal au rectangle fait de AD & de BC (g).
(g) E. l. 6. p. 16. Donc, la ſomme des rectangles faits, l'un de AE & de BD, & l'autre de EC & auſſi de BD, eſt égale à celle des rectangles faits, l'un de AB & de DC, & l'autre de AD & de BC. Mais cette première ſomme eſt la même choſe que le rec-
(h) E. l. 2. p. 1. tangle fait de AC & de BD (h), puiſque AE & EC ſont les parties de la ligne AC. Donc le rectangle fait de AC & de BD eſt égal à la ſomme des rectangles faits, l'un de AB & de DC, & l'autre de AD & de BC; & par conſéquent C. Q. F. D.

PROPOSITION II. Problême.

12. *Connoiſſant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du ſupplément de cet arc.*

* Fig. 6. On donne le diamétre du cercle Z * avec la

corde AB de l'arc ADB de ce même cercle; & il faut trouver la corde BC du supplément BEC de cet arc.

Solution. Du quarré du diamétre donné retranchez le quarré de la corde donnée AB, & la racine quarrée du reste, sera la corde demandée BC.

Constr. Tirez du point A au point C la ligne droite AC.

Démonstr. L'arc ADB & le supplément BEC de cet arc, forment ensemble la demi-circonférence ADBEC du cercle Z (*a*). Ainsi la ligne AC qui joint ensemble les extrémités A & C de cette demi-circonférence est un diamétre de ce cercle, & l'angle B qui est formé par la corde AB de l'arc ADB & par la corde BC du supplément BEC de cet arc, est un angle droit (*b*); & par conséquent le diamétre AC du cercle Z, la corde AB d'un arc ADB de ce cercle, & la corde BC du supplément BEC de cet arc, forment toujours ensemble un triangle rectangle ABC, dont le diamétre AC de ce même cercle est l'hypoténuse. Or, puisque le triangle ABC est toujours rectangle, si du quarré de son hypoténuse AC qui est le diamétre donné, on retranche le quarré de son côté AB qui est la corde donnée, le reste sera le quarré de son autre côté BC (*c*) qui est la corde demandée; & par conséquent la racine quarrée de ce reste, sera cette corde demandée. Donc C. Q. F. F.

(*a*) N. 6.

(*b*) E. l. 3. p. 31.

(*c*) E. l. 1. p. 47.

PROPOSITION III. Problême.

13. *Connoissant le diamétre d'un cercle & les cordes de deux arcs de ce même cercle, trouver la corde de la somme de ces deux arcs.*

* Fig. 7. On donne le diamétre du cercle Z * avec les cordes AB & AC des arcs AEB & AFC de ce même cercle ; & il faut trouver la corde BC de la somme CFAEB de ces arcs.

(a) N. 11. *Solution.* Trouvez (a) les cordes des supplémens des arcs donnés AEB & AFC. Multipliez ensuite la corde donnée AB par celle du supplément de l'arc AFC, & la corde aussi donnée AC par celle du supplément de l'arc AEB. Enfin divisez la somme des produits par le diamétre donné, & le quotient sera la corde demandée BC.

Constr. Tirez le diamétre AD, & les cordes BD & CD.

Démonstr. Les cordes données AB & AC des arcs AEB & AFC forment toujours avec les cordes BD & CD des supplémens de ces arcs, un quadrilatere ABDC qui est inscrit dans le cercle proposé, & dont l'une des diagonales est le diamétre AD de ce même cercle, & l'autre la corde demandée BC. Or, le rectangle fait de cette diagonale AD & de cette autre diagonale BC est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la corde donnée AB & de la corde CD du supplément de l'arc AFC, & l'autre de la corde aussi donnée AC & de la corde BD

(b) N. 12. du supplément de l'arc AEB (b). Donc le quo-

dent de cette somme divisée par la diagonale AD, c'est-à-dire, par le diamétre donné, est l'autre diagonale BC, c'est-à-dire, la corde demandée; & par conséquent C. Q. F. F.

PROPOSITION IV. Problême.

14. *Connoissant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du double de cet arc.*

On donne le diamétre du cercle Z * avec la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle; & il faut trouver la corde BC du double de cet arc. * Fig. 8.

Solution. Trouvez (*a*) la corde du supplément de l'arc donné AEB. Multipliez ensuite cette corde par la corde donnée AB. Enfin divisez le double du produit par le diamétre donné, & le quotient sera la corde demandée BC. (*a*) N. 12.

Constr. Tirez le diamétre AD, & les cordes BD, AC & CD.

Démonstr. La corde demandée BC est égale aux produits faits, l'un de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde CD du supplément de l'arc AFC, & l'autre de la corde AC de l'arc AFC multipliée par la corde BD du supplément de l'arc AEB, pris ensemble & divisés par le diamétre donné AD (*b*). Or, ces produits pris ensemble sont égaux au double du produit de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde BD du supplément de cet arc, puisque les cordes AB & AC étant éga- (*b*) N. 13.

les [H], les cordes BD & CD le ſont auſ-
(a)N. 6. †. ſi (a), & que par conſéquent le produit de AB multipliée par BD, ou par CD, & celui de AC multipliée par BD, ſont égaux. Donc, en diviſant par le diamétre AD le double du produit de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde BD du ſupplément de cet arc, le quotient eſt la corde demandée BC; & par conſéquent C. Q. F. F.

PROPOSITION V. Problême.

15. *Connoiſſant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du triple de cet arc.*

* Fig. 9. On donne le diamétre du cercle Z * avec la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC du triple de cet arc.

(b)N. 14. *Solution.* Trouvez (b) la corde BC du double BDC de l'arc donné AEB. Trouvez en-
(c)N. 13. ſuite (c) la corde de la ſomme de l'arc donné AEB & de cet arc BDC, & cette corde ſera la corde demandée AC.

PROPOSITION VI. Problême.

16. *Connoiſſant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du quintuple de cet arc.*

* Fig. 10. On donne le diamétre du cercle Z * avec la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC du quintuple de cet arc.

(d) N. 15. *Solution.* Trouvez (d) la corde AD du triple
(e) N. 14. AEBD de l'arc donné AEB. Trouvez auſſi (e)

la corde DC du double DFC du même arc AEB. Enfin trouvez (a) la corde de la somme de ces arcs AEBD & DFC, & cette derniére corde sera la corde demandée AC. (a) N. 13.

PROPOSITION VII. Problême.

17. *Connoissant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle de la moitié de cet arc.*

On donne le diamétre du cercle Z* avec la corde AB de l'arc ACB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC de la moitié de cet arc. *Fig. 11.

Solution. Du quarré de la moitié du diamétre donné, retranchez le quarré de la moitié AE de la corde donnée AB; & de la même moitié du diamétre donné, retranchez la racine quarrée du reste. Ajoûtez ensuite le quarré de ce second reste au quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, & la racine quarrée de la somme sera la corde demandée AC.

Constr. Tirez les demi-diamétres AD & CD.

Démonstr. La corde AB est divisée par le demi-diamétre CD en deux parties AE & EB qui sont égales (b), puisque l'arc AC est la moitié de l'arc ACB [H]. Donc le demi-diamétre AD, la moitié AE de la corde donnée AB, & la partie ED du demi-diamétre CD comprise entre la corde A & le centre D du cercle Z, forment toujours ensemble un triangle AED qui est rectangle (c), & dont ce demi-diamétre AD est l'hypoténuse. Ainsi, en re- (b) E. l. 3. p. 30. (c) E. l. 3. p. 3.

tranchant du quarré de ce demi-diamétre AD le quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, le reste est le quarré de cette partie ED du
(a) E. l. 1. p. 47. demi-diamétre CD (a); & par conséquent, en retranchant de ce demi-diamétre la racine quarrée de ce reste, on a l'autre partie CE de ce même demi-diamétre. Or, la corde demandée AC, la moitié AE de la corde donnée AB, & cette autre partie CE du demi-diamétre CD, forment aussi ensemble un triangle
(b) E. l. 3. p. 3. AEC qui est rectangle (b), & dont cette même corde demandée AC est l'hypoténuse. Donc, en ajoûtant le quarré de cette autre partie CE du demi-diamétre CD au quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, la somme est le
(c) E. l. 1. p. 47. quarré de la corde demandée AC (c); & par conséquent la racine quarrée de cette somme, est cette corde demandée AC. Donc C. Q. F. F.

PROPOSITION VIII. Problême.

18. *Connoissant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du tiers de cet arc.*

* Fig. 9. On donne le diamétre du cercle Z* avec la corde AC de l'arc AEBDC de ce même cercle; & il faut trouver la corde AB du tiers de cet arc.

Solution. Suppósez que le nombre des parties du diamétre que contient la corde demandée AB, est un peu plus grand que le tiers de celui qui est donné pour la corde AC; parce que la corde AB est un peu plus grande que le tiers de cette

cette corde AC. Cherchez ensuite (a) le nombre des parties de ce même diamétre que doit avoir cette corde AC relativement au nombre que vous en aurez supposé à la corde AB; & si vous trouvez le même nombre que celui qui est donné, le nombre que vous aurez supposé, sera le nombre demandé. Mais si le nombre de ces parties que vous trouverez par cette voie pour cette corde AC, est plus grand ou plus petit que le nombre donné, diminuez ou augmentez le nombre que vous aurez supposé pour la corde AB, jusqu'à ce que vous en rencontriez un qui donne pour cette corde AC le même nombre que celui qui est donné, & il sera le nombre demandé. (a) N. 15.

PROPOSITION IX. Problême.

19. *Connoissant le diamétre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du cinquiéme de cet arc.*

On donne le diamétre du cercle Z * avec la corde AC de l'arc AEBDFC de ce même cercle; & il faut trouver la corde AB du cinquiéme de cet arc. * Fig. 10.

Solution. Supposez, comme dans le problême précédent, que le nombre des parties du diamétre que contient la corde demandée AB est un peu plus grand que le cinquiéme de celui qui est donné pour la corde AC, parce que la corde AB est un peu plus grande que la cinquiéme partie de cette corde AC. Cherchez ensuite (b) le nombre des parties de ce même (b) N. 16.

diamétre que doit avoir cette corde AC relativement au nombre que vous en aurez supposé à la corde AB; & si vous trouvez le même nombre que celui qui est donné, le nombre que vous aurez supposé, sera le nombre demandé. Mais si le nombre de ces parties que vous trouverez par cette voie pour cette corde AC, est plus grand ou plus petit que le nombre donné, diminuez ou augmentez le nombre que vous aurez supposé pour la corde AB, jusqu'à ce que vous en rencontriez un qui donne pour cette corde AC le même nombre que celui qui est donné, & il sera le nombre demandé. †

CHAPITRE III.

De la Maniére de construire une Table des Sinus. ¶

20. Lorsque l'on veut construire une table des sinus, on commence par

† Cette solution, ni celle du problême précedent, ne sont point géométriques, parce que l'on ne peut point diviser géométriquement un arc de cercle quelconque en un nombre impair de parties égales entr'elles. Mais comme on ne se sert que deux fois de chacun de ces problêmes pour construire une Table des sinus; sçavoir du précedent, pour trouver la corde du tiers de l'arc de 7 d. 30 m. & celle du tiers de l'arc de 2 d. 30 m. & de celui-ci pour trouver la corde du cinquiéme de l'arc de 50 m. & celle du cinquiéme de l'arc de 10 m. on doit peu s'embarrasser si pour les résoudre, on est obligé de tâtonner.

¶ Il n'est point nécessaire de construire des Tables, puisque l'on en a de toutes faites; mais on doit sçavoir les principes sur lesquels les calculs de ces Tables sont fondés, & la maniére dont on a fait ces calculs, si l'on veut en bien comprendre les usages.

faire un cayer qui contienne 91 feuillets †, dont chacun ſoit diviſé de part & d'autre en cinq colomnes de différentes largeurs, de la même maniére dont la premiére des Tables qui ſont à la fin de ce Traité, & que l'on donne pour exemple, eſt diviſée. Et comme de ces cinq colomnes, il n'y a que la premiére à main gauche de chaque page, & la ſeconde, qui doivent ſervir pour l'objet qu'on ſe propoſe dans ce chapitre, ſçavoir, la premiére, pour y nombrer les minutes, & la ſeconde, pour y marquer les ſinus; on écrit ſeulement ce titre, *Minutes*, au haut de cette premiére colomne; cet autre titre, *Sinus*, au haut de la ſeconde; & l'on néglige les autres, parce qu'elles ſont deſtinées pour des nombres dont il ne ſera parlé que dans les ſections ſuivantes. On écrit enſuite en titre, ſur le *verſo* de chaque feuillet, ſçavoir, 0 DEGRÉ, au haut du 1er & du 2e; 1 DEGRÉ, au haut du 3e & du 4e; 2 DEGRÉS, au haut du 5e & du 6e; & ainſi de ſuite, juſqu'à 44 DEGRÉS qui ſe rencontrent ſur les *verſo* du 89e feuillet & du 90e. On écrit de même en titre ſur le *recto* de chaque feuillet, ſçavoir, 45 DEGRÉS, au haut du 91e & du 90e; 46 DEGRÉS, au haut du 89e & du 88e; & ainſi de ſuite en

† On ſuppoſe que l'on ne veut conſtruire que les petites Tables ordinaires, qui ſont les plus commodes pour la pratique de la Trigonométrie-rectiligne. Mais ſi l'on vouloit en faire de grandes qui contiennent les ſinus des ſecondes, il faudroit un plus grand nombre de pages, puiſque chaque degré en occuperoit 60, ſi l'on ne mettoit qu'une minute dans chacune.

rétrogradant, jusqu'à 89 DEGRÉS qui se rencontrent sur les *recto* du 3e feuillet & du 2e. Enfin, on remplit les colomnes qui sont destinées aux minutes, sçavoir, premiérement celles qui sont sur les *verso* des feuillets dont le rang est impair, par ces nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 30. inclusivement, posés perpendiculairement les uns sur les autres, & comptés en allant du haut de la page en bas: secondement, celles qui sont sur les *verso* des feuillets dont le rang est pair, par ces nombres 30, 31, 32, 33, &c. jusqu'à 60. inclusivement, posés de même & dans le même ordre que les précedents: troisiémement, celles qui sont sur les *recto* des feuillets dont le rang est impair, par ces mêmes nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c jusqu'à 30. inclusivement, posés aussi perpendiculairement les uns sur les autres, mais comptés en allant du bas de la page au haut: quatriémement enfin, celles qui sont sur les *recto* des feuillets dont le rang est pair, par les mêmes nombres 30, 31, 32, 33, &c. jusqu'à 60. inclusivement, posés de la même maniére & dans le même ordre que les derniers.

21. Par cet arrangement, les degrés qui sont nombrés au haut des pages, expriment, conjointement avec les minutes qui sont marquées dans ces mêmes pages, les valeurs de tous les arcs de cercle qui ne surpassent point le quart de la circonférence de ce cercle; & chaque arc s'y trouve écrit vis-à-vis de son *Complé-*

ment †, l'un sur les *verso* des feuillets, & l'autre sur les *recto*, ou au contraire, de maniére qu'en ajoûtant les degrés, ou les degrés & les minutes, que contient l'un des arcs qui sont sur les *verso*, aux degrés, ou aux degrés & aux minutes, que contient l'arc qui correspond au précédent sur le *recto*, la somme est toujours 90 deg. Ce qui est très-commode dans la pratique de la Trigonométrie-rectiligne, lorsque les triangles dont il s'agit sont rectangles; & dans la pratique de la Trigonométrie-sphérique, dans laquelle on est souvent obligé de se servir des complémens des arcs, au lieu des arcs mêmes.

22. Le cayer étant ainsi préparé, il s'agit de trouver les valeurs des sinus de tous les arcs, afin de les y écrire dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis de l'arc auquel il appartient; ce qui se fait de la maniére suivante.

Premiérement, on suppose que le rayon du cercle dont on veut connoître la valeur de chaque corde, est divisé en un très-grand nombre de parties égales entr'elles, par exemple, en 10000000 de parties, afin que l'on puisse négliger sans conséquence les restes des divisions & des extractions de racines que l'on sera obligé de faire pour trouver le nombre de ces parties que contient chacune de ces cordes. On prend ensuite la moitié de ce nombre de parties que

† On appelle *Complément* d'un arc, la différence de cet arc au quart de la circonférence d'un cercle.

l'on a ſuppoſées à ce rayon, & l'on écrit cette moitié dans la colomne des ſinus, vis-à-vis de 30 *degrés* 0 *min.* parce que le rayon d'un cercle étant égal à la corde qui ſoûtend la ſixiéme partie de la circonférence de ce cercle (*a*), la moitié du rayon eſt le ſinus de la moitié de la ſixiéme partie de cette circonférence (*b*), & par conſequent de l'arc de 30 degrés.

(a) E. l. 4. p. 15.
(b) N. 4.

Secondement, connoiſſant que la corde qui ſoûtend l'arc de 60 deg. eſt de 1000000 de parties, on cherche (*c*) celle qui ſoûtend l'arc de 30 deg. qui eſt la moitié de celui de 60; celle qui ſoûtend l'arc de 15 deg. qui eſt la moitié de celui de 30; & celle qui ſoûtend l'arc de 7 deg. 30 min. qui eſt la moitié de celui de 15 deg. On cherche enſuite (*d*) la corde qui ſoûtend l'arc de 2 deg. 30 min. qui eſt le tiers de celui de 7 deg. 30 min. & celle qui ſoûtend l'arc de 50 min. qui eſt le tiers de celui de 2 d. 30 m. Enfin, on cherche (*e*) la corde qui ſoûtend l'arc de 10 min. qui eſt le cinquiéme de celui de 50 min. & celle qui ſoûtend l'arc de 2 min. qui eſt le cinquiéme de celui de 10 min. Or, à meſure que l'on trouve les valeurs de ces cordes, on en prend les moitiés; & comme ces moitiés ſont (*f*) les ſinus des arcs de 15 deg. de 7 deg. 30 min. de 3 d. 45. m. de 1 deg. 15 min. de 25 min. de 5 min. & de 1 min. on les écrit dans les colomnes des ſinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle eſt le ſinus.

(c) N. 17.
(d) N. 18.
(e) N. 19.
(f) N. 4.

Troiſiémement, connoiſſant la corde de l'arc

de 2 min. on cherche (*a*) celles des arcs de 4 min. de 8 min. de 16 min. &c. & (*b*) celles des arcs de 6 min. de 18 min. de 54 min. &c. On prend ensuite les moitiés des valeurs de ces cordes ; & comme ces moitiés sont (*c*) les sinus des arcs de 2 m. de 4 min. de 8 m. &c. de 3 m. de 9 min. de 27 min. &c. on les écrit aussi dans les colomnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle est le sinus.

(*a*) N. 14.
(*b*) N. 15.
(*c*) N. 4.

Quatriémement, connoissant les cordes des arcs de 10 min. & de 4 min. on cherche (*d*) celle de l'arc de 14. min. Connoissant les cordes des arcs de &c. on cherche celle de l'arc de &c. & ainsi des autres. Or, les moitiés des valeurs de ces cordes sont les sinus que l'on demande (*e*) ; ainsi on écrit ces moitiés dans les colomnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle est le sinus.

(*d*) N. 13.
(*e*) N. 4.

Cinquiémement enfin, après avoir trouvé, de la maniére dont on vient de le dire, les cordes de tous les arcs du quart de la circonférence du cercle que l'on s'est proposé, depuis la corde qui soûtend l'arc de 2 min. jusqu'à celle qui soûtend l'arc de 90 deg. on cherche (*f*) les cordes des supplements de ces arcs. Or, comme les moitiés de ces derniéres cordes sont (*g*) les sinus des arcs de 45 deg. & au dessus, jusqu'à 90, on écrit aussi ces moitiés dans les colomnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient ; & la Table des sinus est construite.

(*f*) N. 12.
(*g*) N. 4.

SCHOLIE.

On met un point dans cette Table avant les deux derniers des chiffres qui expriment les valeurs des sinus; parce que l'on néglige ordinairement ces deux chiffres dans les calculs de la Trigonomé trie-rectiligne, qui n'exige pas autant de précision que la Trigonométrie-sphérique.

CHAPITRE IV.

De la maniére de se servir de la Table des Sinus.

23. LA Table dont on vient d'enseigner la construction, sert à connoître la valeur du sinus d'un arc donné, & réciproquement celle de l'arc auquel appartient un sinus donné. Or, cet arc donné ou ce sinus donné se trouvent dans cette Table, ou ne s'y trouvent point. Ainsi, tous les usages de cette Table peuvent être renfermés dans les deux problêmes suivans, qui ont chacun deux cas.

PROBLESME I.

24. *Connoître la valeur du Sinus d'un arc donné.*

Premier Cas.

25. *Lorsque l'arc donné se trouve dans la Table.*

Si l'arc donné n'est point de plus de 90 degrés, & ne contient point de parties de minutes, il se trouve dans la Table; ainsi il est facile de connoître la valeur de son sinus, puisqu'elle

est écrite dans les colomnes des sinus, vis-à-vis de la valeur de ce même arc (*a*). Mais pour trouver sans peine cette derniére valeur, il faut observer que si elle est au dessous de 45 deg. on ne doit la chercher que sur les *verso* des feuillets de la Table ; & que si elle est au contraire au dessus de ce nombre, on ne la trouvera que sur les *recto* des mêmes feuillets, & en allant dans un ordre rétrogradé (*b*). (*a*) N. 22. (*b*) N. 20.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple de 37 deg. 28 min. on cherchera sur les *verso* des feuillets de la Table, la page qui a pour titre 37 DEGRE'S. On cherchera ensuite dans la colomne des minutes de cette page le nombre 28 ; & vis-à-vis de ce nombre on trouvera dans la colomne des sinus cet autre nombre 60829.98. pour la valeur du sinus demandé.

MAIS si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple, de 52 deg. 43 min. alors on cherchera sur les *recto* des feuillets de la Table, la page qui a pour titre 52 DEGRE'S. On cherchera ensuite dans la colomne des minutes de cette page le nombre 43 ; & vis-à-vis de ce nombre on trouvera dans la colomne des sinus, cet autre nombre 79564.97. pour la valeur du sinus demandé.

En opérant de la même maniére, on trouvera dans les colomnes des sinus, vis-à-vis de 0 minute, sçavoir, au haut de la page qui a pour titre 29 DEGRE'S, ce nombre 48480.96.

pour la valeur du sinus d'un arc de 29 deg. & au bas de la page qui a pour titre 66 DEGRÉS, cet autre nombre 91354.54. pour la valeur du sinus d'un arc de 66 degrés †. Et ainsi des autres.

Second Cas.

26. *Lorsque l'arc donné ne se trouve point dans la Table.*

27. Si l'arc donné ne se trouve point dans la Table, par la seule raison qu'il est de plus de 90 degrés, au lieu de chercher sa valeur, on cherchera celle de son supplément ; & le nombre que l'on trouvera dans la colomne des sinus, vis-à-vis de cette derniére valeur, exprimera également celle du sinus de l'arc vis-à-vis duquel on l'aura trouvée, & celle du sinus demandé, puisqu'un arc & le supplément de cet arc ont le même sinus (*a*).

(*a*) N. 6.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple de 108 deg. 14 min. on cherchera dans la Table celle du sinus d'un arc de 71 deg. 46 min. qui est le supplément du premier, & le nombre 94979.02, que l'on y trouvera pour la valeur du sinus de ce dernier arc, sera pareillement celle du sinus de l'arc demandé.

28. MAIS si l'arc donné ne se trouve point dans la Table, parce qu'il contient des parties

† On peut aussi trouver les mêmes valeurs des sinus de ces deux derniers arcs, en cherchant celles des sinus des arcs de 28 d. 60 m. & de 65 d. 60 m.

minutes ; alors, comme les différences de l'arc de la Table qui précede immédiatement cet arc donné, à ce même arc donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, ne peuvent être que très-petites, on peut, sans erreur sensible, les supposer proportionnelles à celles des sinus de ces arcs. Ainsi, si l'on fait une régle de proportion, dont le premier terme soit 60 secondes ; le deuxiéme, l'excès de l'arc donné sur celui de la Table qui le précede immédiatement ; & le troisiéme, la différence des valeurs des sinus des deux arcs de la Table entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé : on pourra prendre le quatriéme pour l'excès du sinus demandé sur le sinus de la Table qui le précede immédiatement ; & par conséquent, si l'on ajoûte ce quatriéme terme à ce dernier sinus, la somme sera le sinus demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple de 34 deg. 17 min. 28 sec. on fera une régle de proportion, dont le premier terme sera 60 secondes ; le deuxiéme, 28 secondes ; & le troisiéme, la différence 2403 du sinus 56328.57. de l'arc de 34 deg. 17 min. au sinus 56352.60. de l'arc de 34 deg. 18 m. entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table. On ajoûtera ensuite le quatriéme terme 1121. de cette proportion au sinus 56328.57. de l'arc de 34 deg. 17 min. qui précede immédiate-

ment l'arc donné, & la somme 56339.78. sera la valeur du sinus demandé.

PROBLESME II.

29. *Connoître la valeur de l'arc † auquel appartient un Sinus donné.*

Premier Cas.

30. *Lorsque le Sinus donné se trouve dans la Table.*

Si le sinus donné se trouve dans la Table, il est facile de connoître la valeur de l'arc auquel il appartient, puisque cette valeur y est exprimée par le nombre de degrés qui sert de titre à la page sur laquelle on trouve la valeur de ce sinus, & par le nombre de minutes qui est marqué dans cette même page, vis-à-vis de
(a) N. 20. cette valeur (*a*). Mais pour trouver sans peine cette derniére valeur, il faut observer que si elle est au dessous de ce nombre 70710.68, on ne doit la chercher que sur les *verso* des feuillets de la Table; & que si elle est au contraire au-dessus, on ne la trouvera que sur les *recto* des mêmes feuillets, & en allant dans un ordre retrogradé.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient ce sinus, par exemple, 34147.34, on cherchera ce nombre dans les colomnes des sinus, sur les *verso* des feuillets de

(b) N. 6. † Comme un arc & le supplément de cet arc ont le même sinus, (*b*) la Table ne peut point faire connoître auquel des deux un sinus donné appartient. Ainsi l'on suppose que l'on sçait d'ailleurs si l'arc dont on cherche la valeur, est de plus ou de moins de 90 degrés.

la Table; & comme on le trouve vis-à-vis de 58 min. sur la page qui a pour titre 19 DEGRÉS, on connoîtra que le sinus donné appartient, ou à un arc de 19 deg. 58 min. ou au supplément de cet arc.

Mais si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient cet autre sinus, par exemple 88444.53, on cherchera ce nombre dans les colomnes des sinus, sur les *recto* des feuillets de la Table; & comme on le trouvera vis-à-vis de 11 min. sur la page qui a pour titre 62 DEGRÉS, on connoîtra que cet autre sinus donné appartient, ou à un arc de 62 deg. 11 min. ou au supplément de cet arc.

En opérant de la même maniére, on trouve que ce sinus, par exemple 39073.11, appartient à un arc de 23 deg. ou à son supplément; & que cet autre sinus, par exemple 84804.81. appartient à un arc de 58 deg. ou à son supplément.

Second Cas.

31. *Lorsque le Sinus donné ne se trouve point dans la Table.*

Si le sinus donné ne se trouve point dans la Table, alors on suppose par la même raison que l'on a dite au n°. 28, que les différences du sinus de la Table qui précede immédiatement le sinus donné, à ce même sinus donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, sont proportionnelles à celles des arcs ausquels ces sinus appartiennent. Ainsi, si

l'on fait une régle de proportion, dont le premier terme soit la différence des valeurs des deux sinus de la Table entre lesquels le sinus donné est immédiatement interposé; le deuxiéme, l'excès du sinus donné sur le sinus de la Table qui le précéde immédiatement; & le troisiéme, 60 secondes: on pourra prendre le quatriéme pour l'excès de l'arc demandé sur l'arc de la Table qui le précede immédiatement; & par conséquent, si l'on ajoûte ce quatriéme terme à ce dernier arc, la somme sera la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient ce sinus, par exemple, 64997.14, on fera une régle de proportion, dont le premier terme sera la différence 2211. des deux sinus 64989.03. & 65011.14, entre lesquels le sinus donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table; le deuxiéme, l'excès 811. du sinus donné sur le sinus 64989.03. de la Table qui le précede immédiatement; & le troisiéme, 60 secondes. On ajoûtera ensuite le quatriéme terme 22 secondes de cette proportion à la valeur 40 deg. 32 min. de l'arc auquel appartient le sinus de la Table 64989.03, qui précede immédiatement le sinus donné; & la somme 40 deg 32 m. 22 sec. sera la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc. Or il en est de même de tout autre exemple.

SECTION II.

DES TANGENTES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table des Tangentes.

32. QUOIQU'UNE Table des Sinus suffise en rigueur pour résoudre tous les problêmes de la Trigonométrie ; cependant, comme une pratique est d'autant plus parfaite, qu'elle est & plus simple & plus courte, on a examiné s'il ne seroit pas possible de résoudre encore ces mêmes problêmes par quelque autre voie, afin que dans les différents cas qui peuvent se rencontrer, on puisse choisir celle qui sera la plus abbregée. Or on a trouvé qu'il est possible de le faire, lorsque les triangles dont il s'agit sont rectangles ; & par conséquent il l'est aussi, lorsqu'ils sont acutangles ou obtusangles, puisque l'on peut toujours former deux triangles rectangles avec un triangle quelconque, soit en prolongeant, s'il est nécessaire, l'un des côtés de ce triangle, & en abbaissant une perpendiculaire à ce côté, du sommet de l'angle qui lui est opposé, soit d'une autre maniére †.

33. EN EFFET, si après avoir élevé une perpendiculaire indéfinie A&c.* à l'extrémité A du * Fig. 12.

† On peut en voir un exemple dans le livre suivant, au n°. 84.

rayon CA d'un cercle quelconque Z, & divisé en minutes & même en secondes le quart AH de la circonférence de ce cercle, on tire de son centre C par chaque point de sa division, des sécantes telles que CE, CD, CB, C&c. qui rencontrent en des points E, D, B, &c. cette perpendiculaire A &c. qui est une tangente au cercle Z (*a*), quelque triangle rectangle que l'on puisse imaginer, il sera équiangle à quelqu'un des triangles CAE, CAD, CAB, CA &c. qui seront formés par ce rayon CA, par l'une des tangentes AE, AD, AB, A&c. & par l'une des sécantes CE, CD, CB, C&c. Ainsi, si l'on avoit une Table des valeurs de toutes ces tangentes, & une autre des valeurs de toutes ces sécantes, c'est-à-dire, des Tables des valeurs des tangentes & des sécantes de tous les arcs AF, AG, AM, &c. du quart AH de la circonférence d'un cercle quelconque Z, dont on auroit supposé le rayon CA divisé en un certain nombre de parties égales, lorsque l'on connoîtroit la valeur de l'un quelconque I des angles aigus de quelque triangle rectangle IKL que ce pût être; on trouveroit facilement celle de chaque côté d'un triangle CAD équiangle à ce triangle IKL; puisque le côté CA de ce triangle CAD seroit toujours ce rayon du cercle Z que l'on auroit déterminé, & qu'en cherchant dans ces Tables les valeurs de la tangente & de la sécante d'un arc qui seroit la mesure de cet angle I, on

(*a*) E. l. 3. p. 16.

on auroit les valeurs de la tangente AD & de la sécante CD de l'arc AG de ce même cercle, qui seroit la mesure d'un angle ACD égal à cet angle I : c'est-à-dire, les valeurs des côtés AC & CD de ce même triangle CAD; & par conséquent, si l'on connoissoit aussi l'un des côtés du triangle IKL; on trouveroit par la régle de proportion chacun de ses autres côtés (*a*). (a) E. l. 6. p. 4.

34. RECIPROQUEMENT, lorsque l'on connoîtroit la valeur du côté AD de quelque triangle rectangle CAD que ce pût être, qui seroit décrit sur le rayon CA du même cercle précédent Z, ou celle de l'hypoténuse CD de ce même triangle, on trouveroit aussi, par le moyen de ces mêmes Tables, la valeur de chaque angle aigu I & L d'un triangle quelconque IKL qui seroit équiangle à ce triangle CAD; puisqu'en cherchant dans ces Tables de quel arc ce côté AD seroit la tangente, ou cette hypoténuse CD la sécante, on auroit la valeur de l'arc AG du cercle Z, qui seroit la mesure d'un angle ACD égal à l'angle I du triangle IKL; & que lorsque l'on connoît la valeur de l'un quelconque I des angles aigus de quelque triangle rectangle IKL que ce puisse être, on connoît aussi celle de l'autre angle aigu L de ce même triangle (*b*). (b) E. l. 1. p. 32.

35. IL s'agit donc de supposer que le rayon d'un cercle quelconque Z est divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, & de chercher ensuite le nombre de ces parties qui

convient à la tangente & à la sécante de chaque arc du quart de la circonférence de ce cercle, depuis celles d'un arc d'une minute, ou même d'une seconde, jusqu'à celles d'un arc de 89 deg. 59 min. ou même de 89 d. 59 m. 59 sec. qui sont les plus grandes de toutes †, afin de construire une Table des valeurs de ces tangentes, & une autre des valeurs de ces sécantes, c'est-à-dire, des Tables des valeurs des côtés de tous les triangles rectangles qu'il est possible de décrire sur le rayon CA de ce cercle Z, & à quelqu'un desquels tel triangle rectangle que l'on puisse proposer, sera par conséquent équiangle. Mais, avant que d'examiner par quels principes on pourra résoudre ce problême, il faut remarquer :

36. PREMIEREMENT, que le nombre des parties égales, en lesquelles on doit supposer que le rayon CA est divisé, étant déja déterminé (a) par la construction de la Table des sinus, on doit se servir de ce même nombre pour calculer la Table des tangentes & celle des sécantes, afin de conserver dans ces Tables les proportions qui se trouvent entre le sinus total & les tangentes de certains arcs, ou leurs sécantes, lorsque ces lignes sont calculées sur un même rayon.

(a) N. 21.

37. SECONDEMENT, que les sécantes ne

† Si un arc étoit de 90 deg. sa tangente & sa sécante ne se détermineroient plus l'une l'autre, puisqu'elles seroient parallèles.

contribuant en rien à rendre plus ſimples les calculs qu'il faut faire pour réſoudre les problêmes de la Trigonométrie, il eſt inutile d'en conſtruire une Table. D'ailleurs, la ſécante CE* d'un arc AF étant toujours l'hypoténuſe d'un triangle rectangle CAE, dont les autres côtés ſont le ſinus total CA & la tangente AE de ce même arc, il eſt facile d'en trouver la valeur (a) lorſque l'on connoît celle de cette tangente.

* Fig. 12.

(a) E. l. 1. p. 47.

38. TROISIE'MEMENT enfin, que ſuivant l'idée que l'on donne ici des tangentes (b), on peut dire en géneral, que *la* Tangente *d'un arc eſt une perpendiculaire au rayon de cet arc, qui eſt compriſe entre l'extrémité commune de ce rayon & de cet arc, & une ligne droite tirée par le centre de ce même arc & par ſon autre extrémité.*

(b) N. 35.

COROLLAIRE I.

39. Il ſuit de cette définition, que *la Tangente d'un arc & celle du ſupplément de ce même arc, ſont égales.*

La tangente AB* de l'arc AF, & la tangente DE du ſupplément FD de ce même arc, ſont égales.

* Fig. 13.

Démonſtr. Dans les triangles ABC & DEC, le côté CA eſt égal au côté CD, puiſque ces côtés ſont rayons du même cercle Z; l'angle ACB eſt égal à l'angle DCE (c), puiſque ces angles ſont oppoſés au ſommet; & l'angle CAB eſt égal à l'angle CED, puiſque ces angles qui ſont formés par des tangentes & par des rayons, ſont

(c) E. l. 1. p. 15.

(a) E. l. 3. p. 16. des angles droits. (*a*). Donc le côté AB
(b) E. l. 1. p. 26. est égal au côté DE (*b*); & par conséquent, puisque ce côté AB est la tangente de
(c) N. 38. l'arc AF (*c*), & que ce côté DE est celle de
(d) N. 38. l'arc FD (*d*) qui est le supplément de cet arc
(e) N. 6. †. AF (*e*), la tangente de l'arc AF, & celle du supplément FD de ce même arc, sont égales. Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

40. Il suit de la démonstration du corol-
(f) N. 39. laire précedent (*f*), que *la Sécante d'un arc & celle du supplément de ce même arc, sont égales.*

SCHOLIE.

41. *Lorsque l'on considere un arc de cercle*
*Fig. 13. *quelconque AF* comme étant la mesure d'un angle ACB, au lieu de dire:* la tangente AB de l'arc AF qui est la mesure de l'angle ACB, *on dit seulement:* la tangente AB de l'angle ACB.

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des Tangentes.

PROPOSITION I. Théorême.

42. *LE Sinus du complément d'un arc de cercle quelconque, le Sinus de cet arc, son Rayon & sa Tangente sont proportionnels.*

*Fig. 14. Le sinus EG * du complément EF de l'arc

AE, eſt au ſinus ED de cet arc ; comme le rayon CA du même arc, c'eſt-à-dire, le ſinus total (*a*), eſt à la tangente AB de ce même arc. (a) N. 8.

Démonſtr. L'angle CDE eſt droit (*b*), l'angle (b) N. 7. CGE l'eſt auſſi par la même raiſon ; & il en eſt de même de l'angle GCD, puiſque l'arc AEF qui en eſt la meſure, eſt le quart de la circonférence d'un cercle (*c*). Ainſi le quadrilatere (c) N. 21. f. CDEG eſt un parallélogramme (*d*) ; & par (d) E. l. 1. p. 28. conſéquent (*e*) le ſinus EG du complément EF (e) E. l. 2. p. 34. de l'arc AE, eſt égal au côté CD du triangle CDE. Or, ce triangle CDE & le triangle CAB ſont équiangles (*f*), puiſqu'ils ſont rectangles, (f) E. l. 1. p. 32. l'un en D (*g*) & l'autre en A (*h*) ; & que (g) N. 7. l'angle ACB leur eſt commun. Donc leurs (h) N. 38. côtés homologues ſont proportionnels (*i*) ; & par (i) E. l. 6. p. 4. conſéquent, le côté CD, c'eſt-à-dire [D], le ſinus du complément EF de l'arc AE, eſt au côté ED qui eſt le ſinus de cet arc AE ; comme le côté CA qui eſt le rayon ou le ſinus total, eſt au côté AB qui eſt la tangente de ce même arc AE. Donc C. Q. F. D.

PROPOSITION II. Théorême.

43. *Le rayon d'un cercle quelconque eſt moyen proportionnel entre la Tangente d'un arc quelconque de ce même cercle & celle du complément de cet arc.*

La tangente AB* de l'arc AF, eſt au rayon CA * Fig. 15. de cet arc, c'eſt-à-dire, au ſinus total ; comme ce même rayon ou ſinus total, eſt à la tangente DE du complément DF de ce même arc.

Démonstr. Les triangles CAB & EDC sont
(a) E. l. 1. p. 32. équiangles (*a*), puisqu'ils sont rectangles, l'un
(b) N. 38. en A & l'autre en D (*b*), & que les angles ABC
& DCE, qui sont les angles alternes formés
(c) N. 21. t par les paralléles AB & DC (*c*), sont égaux (*d*).
(d) E. l. 1. p. 29. Donc ces triangles ont leurs côtés homo-
(e) E. l. 6. p. 4. logues proportionnels (*e*); & par conséquent,
le côté AB qui est la tangente de l'arc AF, est
au côté CA qui est le rayon de cet arc, c'est-à-dire, le sinus total; comme le côté DC qui
est aussi le rayon du même arc, & par conséquent aussi le sinus total est au côté DE, qui est la
tangente du complément DF de ce même arc.
Donc C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

De la Maniére de construire une Table des Tangentes.

44. LORSQUE l'on veut construire une Table des tangentes, on commence par chercher la valeur de la tangente de l'arc
(f) N. 42. d'une minute, en faisant (*f*) une régle de proportion, à laquelle on donne pour premier terme, le sinus 9999.99. du complément 89 deg. 59 min. de cet arc; pour second terme, le sinus 29.09. de ce même arc; & pour troisiéme terme, le sinus total 100000.00: & le quatriéme terme de cette proportion que l'on trouve de 29.09 parties, telles que le rayon

a le sinus total en contient 10000000. est cette valeur demandée. On cherche ensuite de la même maniére la valeur de la tangente de l'arc de 2 min. celle de la tangente de l'arc de 3 min. & ainsi de suite, jusqu'à celle de la tangente de l'arc de 45 deg. inclusivement. Or, à mesure que l'on trouve ces valeurs, on les écrit chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient, dans les colomnes qui sont à côté de celles des sinus, & au haut desquelles on met ce titre, *Tangentes* †.

45. On continueroit à chercher les valeurs des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. de la même maniére dont on vient de chercher celles des tangentes des arcs qui sont au dessous de ce nombre, si l'on faisoit entrer dans les calculs que l'on est obligé de faire pour trouver ces valeurs, les restes des divisions & des extractions de racines que l'on a faites pour avoir les valeurs des cordes de ces mêmes arcs. Mais, comme on a négligé ces restes, la perte que l'on fait sur les deux premiers des trois sinus qui servent à trouver les valeurs des tangentes, causeroit une erreur trop considérable, lorsqu'il s'agiroit des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. parce que les différences des tangentes sont d'autant plus grandes, que les tangentes appartiennent à de plus grands arcs. Ainsi, pour avoir les valeurs des tangentes de ces derniers

† Voyez la première des Tables qui sont à la fin de ce Traité.

arcs, on se sert du principe établi au n°. 43, parce qu'en le suivant, on ne perd que sur le premier des trois nombres que l'on emploie pour trouver ces valeurs, & que cette perte ne cause qu'une erreur peu sensible.

46. PAR CONSEQUENT, pour trouver la valeur de la tangente de l'arc de 45 deg. 1 min. on fait (a) une régle de proportion, à laquelle on donne pour premier terme, la tangente 99941.48. du complément 44 deg. 59 min. de cet arc; pour second terme, le sinus total 10000000; & pour troisiéme terme, le même sinus total 10000000: & le quatriéme terme de cette proportion que l'on trouve de 10005819 parties, telles que le sinus total en contient 10000000, est cette valeur demandée. On cherche ensuite de la même maniére la valeur de la tangente de l'arc de 45 deg. 2 min. celle de la tangente de l'arc de 45 d. 3 m. & ainsi de suite jusqu'à celle de la tangente de l'arc de 89 deg. 59 m. laquelle on trouve de 343774667 parties. Or, à mesure que l'on trouve ces valeurs, on les écrit dans les colomnes des tangentes, chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient, de même que l'on a écrit les précédentes; & la Table des tangentes est construite.

(a) N. 43.

SCHOLIE.

47. *On met aussi un point dans cette Table avant les deux derniers des chiffres qui expriment les valeurs des tangentes, pour les mêmes raisons que l'on a dites à la scholie du n°. 22.*

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

De la manière de se servir de la Table des Tangentes.

48. ON se sert de la Table des tangentes, de la même manière dont on a dit qu'il falloit se servir de celle des sinus (*a*). Mais il faut remarquer que dans les cas ausquels l'arc donné où la tangente donnée ne se trouvent point dans cette Table, on ne peut connoître ni la valeur de cette tangente, ni celle de cet arc, avec autant de précision que lorsqu'il s'agit des sinus; parce que les différences des tangentes étant beaucoup plus grandes que celles des sinus, principalement lorsque les arcs ausquels ces tangentes appartiennent, sont de plus de 45 deg. on ne peut point, sans quelqu'erreur, les supposer proportionnelles à celles de ces arcs.

(a) N. 35.

SECTION III.

DES LOGARITHMES.

49. ON ne se servoit autrefois que de la Table des sinus & de celle des tangentes, pour résoudre les problêmes de la Trigonométrie. Mais depuis que le Baron *Neper* Ecossois a inventé les *Logarithmes*, ces Tables

ne sont plus guéres en usage ; parce que ces nouveaux nombres abbregent considérablement les calculs, lorsque les nombres sur lesquels on est obligé d'opérer sont considérables. Ainsi, il s'agit de traiter des Logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table des Logarithmes.

50. ON appelle *premiére puissance* d'un nombre quelconque, ce nombre même ; *seconde puissance* d'un nombre, le produit de la premiére puissance de ce nombre, multipliée une fois par elle-même ; *troisiéme puissance* d'un nombre, le produit de sa premiére puissance, multipliée deux fois par elle-même, c'est-à-dire, le produit de la seconde puissance de ce nombre, multipliée par sa premiére puissance ; *quatriéme puissance* d'un nombre, le produit de sa premiére puissance, multipliée trois fois par elle-même, c'est-à dire, le produit de la troisiéme puissance de ce nombre, multipliée par sa premiére puissance ; & ainsi de suite. Et l'on nomme *Exposant* ou *Logarithme* d'un nombre quelconque, le nombre qui exprime le *degré* de puissance de ce nombre quelconque ; c'est-à-dire, quelle puissance ce nombre quelconque est d'un autre nombre.

PUISSANCES.	EXPOSANS OU LOGARITHMES.
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6
2187	7
6561	8
19683	9
59049	10
177147	11
531441	12
1594323	13
4782969	14
14348907	15
&c.	&c.

Ainsi, la *pre- iére puissance*, ar exemple, du ombre 3, est 3; la *seconde uissance* de ce ême nombre , est 3 fois 3, u 9; sa *troisiéme uiss.* est 3 fois , ou 27; sa *uatriéme puis- ance* est 3 fois 7, ou 81; & insi de suite. Et nombre 1 qui xprime que 3 est première puis- nce du nombre , s'appelle le *ogarithme* de 3; le nombre 2 qui exprime que est la seconde puissance du nombre 3, se omme le *Logarithme* de 9; le nombre 3 qui xprime que 27 est la troisiéme puissance du ombre 3, s'appelle, &c. & ainsi de suite.

51. Donc, à mesure que l'on éleve un mbre quelconque à différens degrés de puis- nce, par la multiplication successive de sa pre- iére puissance, on forme les logarithmes de s nouvelles puissances, en ajoûtant successi- vement à lui-même le logarithme de cette pre-

miére puissance. A mesure au contraire que l'on abbaisse une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, en la divisant successivement par la premiére puissance de ce même nombre; on diminue successivement le logarithme de cette puissance quelconque, par la soustraction du logarithme de cette même premiére puissance, pour avoir les logarithmes des quotiens. Et par conséquent, autant de fois que l'on multiplie une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la premiére puissance de ce nombre, pour produire une certaine puissance de ce même nombre; autant de fois on ajoûte à lui-même le logarithme de cette même premiére puissance, pour former celui de cette certaine puissance. Autant de fois au contraire que l'on divise une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la premiére puissance de ce nombre, pour abbaisser cette puissance quelconque à une certaine puissance; autant de fois on retranche du logarithme de cette même puissance quelconque, celui de cette premiére puissance, pour avoir le logarithme du quotient.

52. Mais, selon les principes du calcul: PREMIEREMENT, c'est la même chose de multiplier d'abord un nombre quelconque par un autre nombre; de multiplier ensuite le produit encore par un autre nombre; & ainsi de suite: ou de multiplier tout-d'un-coup ce premier nombre, par le produit de tous ces autres nombres. C'est aussi la même chose d'ajoûter

d'abord à un nombre quelconque un autre nombre; d'ajoûter ensuite à la somme encore un autre nombre; & ainsi de suite: ou d'ajoûter tout-d'un-coup à ce premier nombre la somme de tous ces autres nombres. Donc, au lieu de multiplier d'abord une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la premiére puissance de ce nombre; de multiplier ensuite le produit encore par cette premiére puissance; & ainsi de suite un certain nombre de fois: on peut multiplier tout-d'un-coup cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par une puissance de ce même nombre, qui soit d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et pour avoir le logarithme du produit, au lieu d'ajoûter d'abord au logarithme de cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, celui de la premiére puissance de ce nombre; d'ajoûter ensuite à la somme encore le logarithme de cette premiére puissance; & ainsi de suite, autant de fois qu'il faudroit multiplier cette puissance quelconque, par cette premiére puissance, pour avoir ce produit: on peut ajoûter tout-d'un-coup au logarithme de cette même puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, le logarithme de la puissance de ce même nombre, qui est d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et par conséquent, on peut dire généralement que:

53. *Le produit de deux puissances quelcon-*

ques de tel nombre que ce puisse être, multipliées l'une par l'autre, a toujours pour logarithme la somme des logarithmes de ces deux puissances.

Ainsi le produit, par exemple 531441. de la cinquiéme puissance 243. du nombre 3, multipliée par la septiéme puissance 2187. de ce même nombre, a pour logarithme la somme 12. des logarithmes 5. & 7. de ces deux puissances. Et il en est de même de tout autre exemple.

54. SECONDEMENT, c'est la même chose de diviser d'abord un nombre quelconque par un autre nombre; de diviser ensuite le quotient encore par un autre nombre; & ainsi de suite: ou de diviser tout-d'un-coup ce premier nombre, par le produit de tous ces autres nombres. C'est aussi la même chose de retrancher d'abord d'un nombre quelconque, un autre nombre; de retrancher ensuite du reste encore un autre nombre; & ainsi de suite: ou de retrancher tout-d'un-coup de ce premier nombre la somme de tous ces autres nombres. Donc, au lieu de diviser d'abord une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la premiére puissance de ce nombre; de diviser ensuite le quotient encore par cette premiére puissance; & ainsi de suite un certain nombre de fois: on peut diviser tout-d'un-coup cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par une puissance de ce même nombre, qui soit d'un degré égal à ce certain nom-

bre de fois. Et pour avoir le logarithme du quotient, au lieu de retrancher d'abord du logarithme de cette puiſſance quelconque de tel nombre que ce puiſſe être, celui de la premiére puiſſance de ce nombre; de retrancher enſuite du reſte encore le logarithme de cette premiére puiſſance; & ainſi de ſuite, autant de fois qu'il faudroit diviſer cette puiſſance quelconque par cette premiére puiſſance, pour avoir ce quotient: on peut retrancher tout-d'un-coup du logarithme de cette même puiſſance quelconque de tel nombre que ce puiſſe être, celui de la puiſſance de ce même nombre, qui eſt d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et par conſéquent, on peut auſſi dire généralement que:

55. *Le quotient d'une puiſſance quelconque de tel nombre que ce puiſſe être, diviſée par une autre puiſſance quelconque de ce même nombre, a toujours pour logarithme la différence des logarithmes de ces deux puiſſances.*

Ainſi le quotient, par exemple 243. de la douziéme puiſſance 531441. du nombre 3, diviſée par la ſeptiéme puiſſance 2187. de ce même nombre, a pour logarithme la différence 5. des logarithmes 12. & 7. de ces deux puiſſances. Et il en eſt auſſi de même de tout autre exemple.

56. Ainsi, ſi l'on avoit une Table de toutes †

† C'eſt-à-dire, juſqu'à un degré qui produiſe un nombre au-delà duquel on ne compte ordinairement plus; car ſi on l'en-

les puissances d'un nombre quelconque, dans laquelle les logarithmes de ces puissances seroient écrits, chacun vis-à-vis de la puissance à laquelle il appartiendroit; lorsque l'on connoîtroit deux quelconques de ces puissances, on trouveroit leurs logarithmes par le moyen de cette Table. Et lorsqu'on les auroit trouvés, on connoîtroit, par le moyen de l'addition, le produit de ces deux puissances; puisqu'en ajoûtant l'un à l'autre ces deux logarithmes, & en cherchant ensuite dans cette même Table le nombre auquel leur somme appartiendroit, c'est-à-dire, de quelle puissance cette somme seroit le logarithme, on trouveroit ce produit
(a) N. 53. vis-à-vis de cette somme (*a*). On connoîtroit au contraire, par le moyen de la soustraction, le quotient de l'une de ces mêmes puissances, divisée par l'autre; puisqu'en retranchant du logarithme de la puissance qui devroit être divisée, celui de la puissance qui devroit diviser, & en cherchant ensuite dans la Table le nombre auquel la difference appartiendroit, c'est-à-dire, de quelle puissance cette différence seroit le logarithme, on trouveroit ce quotient
(b) N. 55. vis-à vis de cette difference (*b*) †.

tendoit autrement, cette Table ne seroit pas possible; puisque la multitude des puissances d'un nombre étant infinie, la Table de ces puissances le seroit aussi.

† Les Logarithmes abbregent considérablement les calculs,
(c) N. 49. comme on l'a déja dit (c), puisqu'ils convertissent la multiplication en addition, & la division en soustraction; & que l'on a plutôt fait une addition qu'une multiplication, & une soustraction qu'une division. Mais il faut observer de ne s'en servir que

57. IL s'agit donc de prendre un nombre à volonté, de former ensuite les puissances de ce nombre jusqu'à un certain degré, & de chercher enfin les logarithmes de ces puissances; afin de construire une Table & de ces puissances & de ces logarithmes. Mais si l'on ne comprenoit dans cette Table que les puissances ordinaires d'un nombre quelconque (c'est-à-dire, ses puissances entiéres, telles que nous venons de les proposer (a) pour exemple) & les loga- (a) N. 50.
rithmes de ces puissances ordinaires, cette Table ne seroit pas d'une grande utilité; puisque aucun des nombres interposés entre ces puissances, ni par conséquent les logarithmes de ces nombres, ne s'y trouveroient. Ainsi, avant que d'entreprendre d'en construire une, il faut déduire de l'idée que nous venons de donner des logarithmes en géneral, quelques principes, par le moyen desquels on puisse: PREMIÉREMENT, *faire entrer dans une Table des logarithmes, ceux de tous les nombres entiers, depuis le logarithme de l'unité, jusqu'à celui du nombre 10000, au moins; ce qui fait l'étenduë des Tables ordinaires:* SECONDEMENT, *augmenter cette Table autant que l'on en aura besoin;* c'est-à-dire, *trouver le logarithme d'un nombre quelconque*

lorsqu'on est obligé d'opérer sur de très-grands nombres; parce qu'autrement, loin de rendre les opérations plus courtes, ils ne seroient que les allonger par le temps qu'il faut employer à chercher dans la Table le logarithme d'un nombre, & le nombre auquel un logarithme appartient; & par les calculs qu'il faut faire pour connoître & ce logarithme & ce nombre, lorsqu'ils ne sont point dans la Table.

plus grand que 10000; *&* *réciproquement, le nombre auquel appartient un logarithme quelconque plus grand que celui du nombre* 10000: TROISIÈMEMENT *enfin, trouver par le moyen de cette même Table, les logarithmes des nombres fractionnaires, lesquels nombres n'y sont point compris.*

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des Logarithmes.

PROPOSITION I. Théorême.

58. *UN nombre quelconque a pour logarithme tel nombre que l'on veut; lorsque l'on ne considére point ce premier nombre, comme étant une puissance d'un autre nombre dont le logarithme est déterminé.*

Démonstr. Le logarithme d'un nombre quelconque, est le nombre qui exprime le degré de puissance de ce premier nombre (*a*). Or, un nombre quelconque a tel degré de puissance que l'on veut, puisque l'on peut toujours le considérer comme n'étant point un produit; & qu'alors il est une puissance du *premier degré* (*b*): ou comme étant un produit de sa racine du degré dont on veut qu'il soit une puissance, multipliée par elle-même, autant de fois qu'il est

(*a*) N. 50.
(*b*) N. 50.

nécessaire pour produire cette puissance, soit que cette racine soit commensurable, soit qu'elle soit incommensurable; & qu'alors il est une puissance de ce degré que l'on veut. Ainsi ce nombre, par exemple 64, peut être considéré comme n'étant point un produit; & alors il est une puissance du *premier degré* (*a*): ou (a) N. 50. comme étant un produit de sa racine seconde, laquelle est 8, multipliée une fois par elle-même; & alors il est une puissance du *second degré*(*b*): ou comme étant un produit de sa ra- (b) N. 50. cine troisiéme, laquelle est 4, multipliée deux fois par elle-même; & alors il est une puissance du *troisiéme degré* (*c*): ou comme étant un pro- (c) N. 50. duit de sa racine quatriéme, laquelle est incommensurable, multipliée trois fois par elle-même; & alors il est une puissance du *quatriéme degré* (*d*); & ainsi de suite. Donc, lorsqu'on (d) N. 50. veut que le degré de puissance d'un nombre quelconque, soit exprimé par un certain nombre, il n'y a qu'à considérer ce nombre quelconque comme étant une puissance du degré exprimé par ce certain nombre. Et comme ce certain nombre peut être tel nombre que l'on veut, on peut exprimer le degré de puissance d'un nombre quelconque par tel nombre que l'on veut; & par conséquent, un nombre quelconque, considéré comme il est dit dans l'hypothèse, a pour logarithme tel nombre que l'on veut.

PROPOSITION II. Théorême.

59. *L'unité a o pour logarithme, lorsqu'on la considere comme étant une puissance d'un nombre quelconque dont le logarithme est déterminé.*

Démonstr. Le quotient d'un nombre quelconque divisé par un autre, a pour logarithme la différence des logarithmes de ces deux nom-
(a) N. 55. bres (*a*). Ainsi, le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, a pour logarithme la différence du logarithme de ce nombre au logarithme de ce même nombre. Or, la différence du logarithme d'un nombre quelconque au logarithme de ce même nombre, est o. Donc, le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, a o pour logarithme; & par conséquent, puisque l'unité est le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, l'unité considérée comme il est dit dans l'hypothèse, a o pour logarithme.

PROPOSITION III. Théorême.

60. *La seconde puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme le double de celui de ce même nombre.*

Démonstr. Le produit d'un nombre quelconque multiplié par un autre, a pour logarithme la somme des logarithmes de ces deux nom-
(b) N. 53. bres (*b*). Or, la seconde puissance d'un nombre quelconque, est le produit de ce nombre quel-
(c) N. 50. conque multiplié par lui-méme (*c*). Donc, la

seconde puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme deux fois le logarithme de ce même nombre; & par conséquent, le double de ce logarithme.

COROLLAIRE.

61. Il suit de ce théorême, que *la racine seconde d'un nombre quelconque, a pour logarithme la moitié de celui de ce même nombre.*

PROPOSITION IV. Théorême.

62. *La troisiéme puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme le triple de celui de ce même nombre. Et ainsi de suite.*

Démonstr. Par une conséquence du N°. 53, le produit d'un nombre quelconque multiplié par d'autres nombres, a pour logarithme la somme du logarithme de ce nombre quelconque & des logarithmes de ces autres nombres. Or, la troisiéme puissance d'un nombre quelconque, est le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même (*a*). Donc, la troisiéme puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme trois fois le logarithme de ce même nombre; & par conséquent, le triple de ce logarithme. Et ainsi de suite.

(*a*) N. 50.

COROLLAIRE.

63. Il suit de ce théorême, que *la racine troisiéme d'un nombre quelconque, a pour logarithme le tiers de celui de ce même nombre. Et ainsi de suite.*

CHAPITRE III.

De la Maniére de construire une Table des Logarithmes.

64. LORSQUE l'on veut construire une Table des logarithmes, on commence par faire un cayer qui contienne 50 feuillets, dont chacun soit divisé de part & d'autre en huit colomnes de différentes largeurs; de la même maniére dont la seconde des Tables qui sont à la fin de ce Traité, & que l'on donne pour exemple, est divisée. On écrit ensuite en titre les nombres suivans, sçavoir, 100. sur le *verso* du premier feuillet; 200. sur le *recto* du second; 300 sur le *verso* du même second feuillet; 400. sur le *recto* du troisiéme; & ainsi de suite, jusqu'à ce nombre 9900. qui se rencontre sur le *verso* du 51e. On écrit aussi de même en titre, *Nombres naturels*, au haut de la premiére colomne de chaque page, de la quatriéme & de la septiéme; & *Logarithmes*, au haut de la seconde colomne, de la cinquiéme & de la huitiéme. Enfin on écrit de suite, & en allant du haut de chaque colomne au bas, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 10000, dans les colomnes qui leur sont destinées; de maniére qu'il y en ait 34. dans la premiére colomne de chaque page, 33. seulement dans chacune des deux autres, & par conséquent, 100. dans chaque page.

65. LE cayer étant ainsi préparé, il s'agit de trouver les logarithmes de tous les nombres qui y sont marqués; afin de les écrire dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre naturel auquel il appartient. Mais avant que d'en entreprendre la recherche, il faut observer:

66. PREMIEREMENT, que quoiqu'il soit libre (a) de choisir tel nombre que l'on veut, pour être le nombre *absolu* (c'est-à-dire, celui dont le logarithme doit déterminer les logarithmes de tous les autres nombres) & de donner pour logarithme à ce premier nombre, aussi tel nombre que l'on veut (b); cependant la facilité avec laquelle on multiplie & l'on divise un nombre quelconque par un nombre décimal, doit toujours engager à en prendre un par préférence à tout autre nombre, pour être ce premier nombre; de même que celle avec laquelle on ajoûte à un nombre quelconque, & l'on retranche d'un nombre quelconque un nombre décimal, doit aussi déterminer à en donner un pour logarithme à ce même premier nombre.

(a) N. 57.
(b) N. 58.

D'ailleurs, en prenant 10. qui est le premier des nombres décimales, pour être ce nombre absolu, & en lui donnant pour logarithme aussi un nombre décimal quelconque; le nombre des chiffres par lequel ce nombre 10. est exprimé, surpassera d'une unité la *Caractéristique* † de son

† On appelle *Caractéristique* d'un logarithme quelconque, le premier chiffre à main gauche de ce logarithme, lorsqu'il s'agit

logarithme. Or, à mesure que selon les principes du calcul on ajoûtera un 0 aux chiffres de ce nombre 10, pour l'élever à ses différentes puissances ordinaires, & que par conséquent on augmentera d'une unité le nombre de ses chiffres; il faudra en même temps, pour former les logarithmes de ces différentes puissances, ajoûter à lui-même le logarithme de ce même
(a) N. 51. nombre 10 (a); & par conséquent augmenter aussi d'une unité la caractéristique de son logarithme. Ainsi le nombre des chiffres de chacune des puissances ordinaires de ce nombre 10, surpassera aussi d'une unité la caractéristique du logarithme de cette puissance. Mais, par une propriété de la numération, tous les nombres entiers qui sont compris entre l'unité & le nombre 10, sont exprimés par un seul chiffre: tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 10. & sa seconde puissance 100, sont exprimés par deux chiffres: tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 100. & la troisiéme puissance 1000. du même nombre 10, sont exprimés par trois chiffres; & ainsi de suite. Par la nature des logarithmes, ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre l'unité & le

d'une puissance du nombre absolu, qui est au dessous de la dixiéme; & le nombre qui resulte de l'addition successive de l'unité à ce premier chiffre, lorsqu'il est question d'une puissance de ce même nombre absolu, qui est la dixiéme ou au dessus. Dans la Table, on la sépare par un point, des autres chiffres avec lesquels elle exprime un logarithme.

nombre

nombre 10, sont renfermés entre le logarithme de l'unité & celui du nombre 10 : ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 10. & sa seconde puissance 100, sont renfermés entre le logarithme du nombre 10. & celui de cette seconde puissance 100 : ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 100. & la troisiéme puissance 1000. du même nombre 10. sont renfermés entre le logarithme du nombre 100. & celui de cette troisiéme puissance 1000 ; & ainsi de suite. Enfin, par rapport au nombre décimal que l'on aura donné pour logarithme au nombre 10, tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme de l'unité & celui du nombre 10, & par conséquent tous les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront un 0 pour caractéristique, c'est-à-dire, pour premier chiffre à main gauche, lorsqu'ils seront exprimés par un même nombre de chiffres que le logarithme du nombre 10 : tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme du nombre 10. & celui de la seconde puissance 100. de ce nombre 10, & par conséquent tous les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront chacun le nombre 1 pour caractéristique : tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme du nombre 100. & celui de la troisiéme puissance 1000. du même nombre 10, & par conséquent tous

les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront chacun le nombre 2 pour caractéristique; & ainsi de suite. Donc, *le nombre des chiffres par lesquels un nombre entier quelconque sera exprimé, surpassera toujours d'une unité la caractéristique de ce nombre entier.* Et par conséquent, on connoîtra toujours par la caractéristique d'un logarithme quelconque, le nombre des chiffres que doit avoir le nombre naturel auquel ce logarithme appartient.

67. SECONDEMENT, que comme on sera souvent obligé d'ajoûter ensemble deux des logarithmes trouvés, & de prendre la moitié de leur somme, pour connoître les logarithmes des nombres qui ne sont point des puissances entiéres du nombre absolu, on doit prendre un très-grand nombre pour être le logarithme de ce nombre absolu; afin que les logarithmes n'étant exprimés que par des nombres composés d'une grande multitude d'unités, les parties d'une unité qui resteront, lorsque les sommes dont il faudra prendre les moitiés, deviendront des nombres impairs, soient si peu de chose par rapport à ces grands nombres, que l'on puisse les négliger sans aucune conséquence.

68. CECI POSÉ, si l'on veut trouver les logarithmes de tous les nombres qui sont marqués dans le cayer, on commencera, conformément à ce qui vient d'être dit (*a*), par prendre le nombre 10. pour être le nombre absolu, & par lui

(*a*) N. 66. & 67.

nner pour logarithme un très-grand nombre écimal, par exemple, 1.00000000 †. Or, l'on donne ce nombre 1.00000000. pour garithme au nombre 10, le logarithme de la seconde puissance 100. de ce nombre 10. sera 2.00000000. (*a*); celui de sa troisiéme (a) N. 60. puissance 1000, sera 3.00000000. (*b*); & (b) N. 62. celui de sa quatriéme puissance 10000, sera 4.00000000. (*c*). Ainsi, l'on écrira ces loga- (c) N. 62. rithmes dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre naturel auquel il appartient. Et comme le logarithme de l'unité est toujours 0 (*d*), quels que (d) N. 59. soient les logarithmes des autres nombres, on écrira aussi 0.00000000. vis-à-vis de l'unité, pour en être le logarithme.

69. APRE's avoir ainsi trouvé & écrit dans le cahier les logarithmes des puissances ordinaires du nombre 10, on cherchera le logarithme du nombre 2. de la maniére suivante, qui servira en même temps d'exemple de la méthode que l'on doit suivre pour trouver les logarithmes de tous les autres nombres.

Premiérement, on extraira la racine seconde du nombre 10. Mais comme ce nombre n'est point une seconde puissance parfaite, on commencera par lui ajoûter quatorze zeros, c'est-à-dire, par le multiplier par cent trillions; & par ce moyen, on trouvera ce nombre

† Ce logarithme est dix fois plus grand que celui des Tables ordinaires.

$3.\frac{1622776}{10000000}$ pour ſa racine ſeconde approchée. Or, cette racine approchée peut être priſe ſans erreur pour la vraie, puiſqu'elle n'en differe pas de la dix-millioniéme partie d'une unité, comme on le prouve en élevant cette racine approchée à ſa ſeconde puiſſance, ce qui produit un nombre moins grand que 10, & en élevant enſuite cette autre racine $3.\frac{1622777}{10000000}$ auſſi à ſa ſeconde puiſſance, ce qui produit un nombre plus grand que 10. Ainſi, puiſque ce nombre $3.\frac{1622776}{10000000}$, peut être pris pour la racine ſeconde de 10. dont le logarithme a été déterminé de
(a) N. 68. 1.00000000. d'unités (*a*), le logarithme de
(b) N. 61. cette racine ſeconde, ſera de 0.50000000. (*b*).

Secondement, comme cette racine $3.\frac{1622776}{10000000}$ eſt plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme, on extraira auſſi la racine ſeconde de cette racine, après l'avoir multipliée par cent trillions, comme on a fait au nombre 10, & par la même raiſon; & l'on trouvera ce nombre $1.\frac{7782793}{10000000}$ pour cette racine ſeconde approchée,
(c) N. 61. dont le logarithme ſera de 0.25000000. (*c*), puiſque celui de $3.\frac{1622776}{10000000}$ eſt de 0.50000000. ſuivant ce qui vient d'être dit. Mais cette racine eſt moins grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme. Ainſi ce nombre eſt interpoſé entre la racine précédente $3.\frac{1622776}{10000000}$ & cette derniére $1.\frac{7782793}{10000000}$; & par conſéquent ſon logarithme eſt auſſi interpoſé entre les logarithmes 0.50000000. & 0.25000000. de ces deux racines.

Troisiémement, comme le nombre 2. dont on cherche le logarithme, est interposé entre ces deux racines $3.\frac{1622776}{10000000}$ & $1.\frac{7782793}{10000000}$, on les multipliera l'une par l'autre, & l'on aura ce produit $5.\frac{62341279693368}{100000000000000}$, dont le logarithme sera la somme 0.7500000. des logarithmes de ces deux mêmes racines (*a*). On extraira ensuite la racine seconde de ce produit, après l'avoir aussi multiplié par cent trillions, comme on a fait aux nombres précédents, & comme on observera de le faire toujours dans la suite, par les mêmes raisons; & l'on trouvera ce nombre $2.\frac{3713736}{10000000}$ pour cette racine seconde approchée, dont le logarithme sera de 0.3750000. (*b*), puisque celui du produit $5.\frac{62341279693368}{100000000000000}$ est de 0.7500000, comme on vient de le dire. Mais cette racine est plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme. Ainsi ce nombre est à présent interposé entre la racine précédente $1.\frac{7782793}{10000000}$ & cette derniére $2.\frac{3713736}{10000000}$; & par conséquent son logarithme est aussi interposé entre les logarithmes 0.2500000. & 0.3750000. de ces deux racines. (a) N. 53. (b) N. 61.

Quatriémement, comme le nombre 2. dont on cherche le logarithme, est à présent interposé entre ces deux racines $1.\frac{7782793}{10000000}$ & $2.\frac{3713736}{10000000}$, on les multipliera l'une par l'autre, & l'on aura ce produit $4.\frac{21696458544648}{100000000000000}$, dont le logarithme sera la somme 0.6250000 des logarithmes de ces deux mêmes racines (*c*). On extraira ensuite la racine seconde de ce produit, après l'avoir (c) N. 53.

multiplié par cent trillions, comme on a déja dit qu'il falloit toujours le faire ; & l'on trouvera ce nombre $2.\frac{0535249}{10000000}$ pour cette racine seconde approchée, dont le logarithme sera de (a) N. 61. 0.3 1 2 5 0000 (*a*), puisque celui du produit $4.\frac{21696458544068}{100000000000000}$ est de 0.6 2 5 00000, comme on vient de le dire. Mais cette racine est plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme ; ainsi ce nombre est à présent interposé encore entre la racine précédente $1.\frac{7783791}{10000000}$ & cette derniére $2.\frac{0535249}{10000000}$; & par conséquent son logarithme est aussi interposé entre les logarithmes 0.2 5000000 & 0.3 1 2 5 0000 de ces deux racines.

Cinquiémement enfin, on continuera à multiplier toujours l'une par l'autre (comme on vient de le faire, & comme on le voit à la troisiéme des Tables qui sont à la fin de ce Traité) les deux racines entre lesquelles le nombre 2. se trouvera successivement interposé ; à extraire ensuite la racine seconde du produit, toujours après l'avoir multiplié par cent trillions ; & à prendre le logarithme de cette racine seconde approchée, jusqu'à ce que l'on soit enfin parvenu à renfermer le logarithme que l'on cherche, entre deux logarithmes qui ne different plus que de deux † unités ; & par conséquent, à

† On ne parvient quelquefois qu'à des logarithmes qui different de trois unités : mais cela revient au même que s'ils ne différoient que de deux ; parce que, comme on ne prend que des nombres entiers pour logarithmes, ces différences 3 & 2 donnent pareillement 1 pour leurs moitiés.

connoître ce logarithme ; puisque ne pouvant y avoir qu'un seul nombre entier d'interposé entre deux nombres qui ne different que de deux unités, le nombre entier qui sera interposé entre ces deux derniers logarithmes, ne pourra être que ce logarithme cherché.

70. Or, ce n'est qu'en 25. opérations que l'on parvient dans cet exemple à rencontrer ces deux logarithmes qui ne different plus que de deux unités; parce que c'est en prenant successivement les moitiés des sommes des logarithmes entre lesquels le logarithme que l'on cherche est interposé, que l'on resserre de plus en plus ce logarithme entre des bornes étroites; & que la différence 100000000. des logarithmes 0.00000000. & 1.00000000, entre lesquels le logarithme que l'on cherche est d'abord interposé, ne se trouve réduite à cette difference 2, qu'après en avoir pris la moitié de la moitié de la moitié, & ainsi de suite, jusqu'à 25 fois.

71. Le logarithme du nombre 2. étant ainsi connu, on trouvera (a) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires 4, 8, 16, 32, &c. de ce nombre 2. On cherchera ensuite (b) ceux des produits 20, 40, 80, 160, &c. 200, 400, 800, &c. 2000, 4000 & 8000. des nombres 10, 100. & 1000. multipliés par ce même nombre 2; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes, on les écrira dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

(a) N. 60. & 62.

(b) N. 53.

72. On cherchera ensuite le logarithme du nombre 3. de la même maniére dont on vient
(a) N. 69. de s'y prendre (a) pour trouver celui du nombre 2; & lorsque l'on connoîtra ce logarithme, on
(b) N. 60. & 62. trouvera (b) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires 9, 27, 81, &c. de ce nom-
(c) N. 53. bre 3. On cherchera ensuite (c) ceux de tous les produits de ce même nombre 3. multiplié par chacun des nombres naturels dont les logarithmes seront déja connus; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes, on les écrira dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

73. On connoîtra ensuite le logarithme du
(d) N. 55. nombre 5. (d), en retranchant le logarithme du nombre 2. de celui du nombre 10; & lorsque
(e) N. 60. & 62. l'on aura ce logarithme, on trouvera (e) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires 25, 125, 725, &c. de ce nombre 5. On cher-
(f) N. 53. chera ensuite (f) ceux de tous les produits de ce même nombre 5. multiplié par chacun des nombres naturels dont les logarithmes seront déja connus; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes, on les écrira aussi dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

74. Enfin, on continuera de la même maniére à chercher les logarithmes des nombres premiers; à trouver ensuite, par leur moyen, ceux des multiples de ces nombres; & à écrire enfin

enfin ces logarithmes dans les colomnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra, jusqu'à ce que l'on ait les logarithmes de tous les nombres naturels qui sont marqués dans le cayer; & alors la Table des logarithmes sera construite.

CHAPITRE IV.

De la Maniére de se servir de la Table des Logarithmes.

75. LA Table dont on vient d'enseigner la construction, sert à connoître le logarithme d'un nombre donné, & réciproquement le nombre auquel appartient un logarithme donné. Or ce nombre donné, & ce logarithme donné, se trouvent dans cette Table, ou ne s'y trouvent point. Ainsi tous les usages de cette Table peuvent être renfermés dans les deux Problêmes suivans, qui ont chacun deux cas.

PROBLESME I.

76. *Connoître le logarithme d'un nombre donné.*

Premier Cas.

77. *Lorsque le nombre donné se trouve dans la Table.*

Si le nombre donné n'est ni fractionnaire ni exprimé par plus de quatre chiffres, il se trouve dans la Table; ainsi il est facile de connoître

son logarithme, puisque ce logarithme y est écrit vis-à-vis de ce nombre, dans la colomne des logarithmes.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 4892, on cherchera dans la Table des logarithmes la page qui a pour titre 4800. On cherchera ensuite dans les colomnes des nombres naturels de cette page, le nombre donné 4892; & l'on trouvera vis-à-vis de ce nombre, dans les colomnes des logarithmes, cet autre nombre 3.6894864 pour le logarithme demandé.

Second Cas.

78. *Lorsque le nombre donné ne se trouve point dans la Table.*

Premièrement.

79. *Lorsque le nombre donné ne se trouve point dans la Table, parce qu'il est exprimé par plus de quatre chiffres, c'est-à-dire, parce qu'il est plus grand que* 10000.

80. On examinera si par une ou par plusieurs divisions, on ne pourroit point réduire le nombre donné à un quotient quelconque moins grand que 10000; & s'il est possible de le faire, la somme des logarithmes de ce quotient, & des diviseurs que l'on aura em-
(a) N. 53. ployés pour le trouver, sera (*a*) le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 756465 3, on examinera s'il ne pourroit point être exactement

divisé par quelques-uns des nombres premiers contenus dans la quatriéme des Tables qui sont à la fin de ce Traité. Or, comme on trouvera qu'il peut l'être par ces nombres 3, 3 & 769, qui le réduisent à ce quotient 1093 moins grand que 10000, on ajoûtera ensemble les logarithmes 0.4771212, 0.4771212, 2.8859263 & 3.0386201 de ces diviseurs & de ce quotient, & leur somme 6.8787888 sera (*a*) le logarithme demandé. (a) N. 53.

81. MAIS si le nombre donné est un nombre premier, & ne peut par conséquent être diminué par la division, alors on cherchera (*b*) les logarithmes du premier de ceux des nombres supérieurs au nombre donné, & du premier de ceux des nombres inférieurs au même nombre donné, qui peuvent être réduits par la division à des quotiens moins grands que 10000. Or, comme le nombre donné sera interposé entre ces deux nombres, son logarithme sera aussi renfermé entre les logarithmes de ces deux mêmes nombres; & par conséquent on le trouvera de la même maniére dont on s'y est pris (*c*) pour connoître le logarithme du nombre 2. (b) N. 80. (c) N. 69.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 54059 qui est un nombre premier, on commencera par chercher (*d*) les logarithmes 4.7328760 & 4.7328599 des nombres 54060 & 54058, entre lesquels le nombre donné est interposé, & qui peuvent se réduire par la division à ces (d) N. 80.

quotiens 5406 & 179 qui sont moins grands chacun que 10000. On multipliera ensuite ces nombres 54060 & 54058 l'un par l'autre, & l'on aura ce produit 2922375480, dont le logarithme sera la somme 9.4657359 des (a) N. 53. logarithmes de ces deux mêmes nombres (*a*). Enfin on extraira la racine seconde de ce produit, après l'avoir multiplié par cent trillions; & l'on trouvera ce nombre $54058.\frac{9999907}{10000000}$ pour cette racine seconde approchée, dont le (b) N. 61. logarithme sera de 4.7328679 (*b*), puisque celui du produit 2922375480, est de 9.4657359, comme on vient de le dire. Mais cette racine sera moins grande que le nombre donné 54059; ainsi ce nombre sera alors interposé entre le nombre précédent 54060 & cette racine; & par conséquent son logarithme sera aussi interposé entre celui de ce dernier nombre & celui de cette même racine.

Or, si l'on continue à chercher ce logarithme demandé, de la même maniére dont on (c) N. 69. s'y est pris (*c*) pour connoître celui du nombre 2, on trouvera qu'il est de 4.7328677. Mais (d) N. 70. ce ne sera qu'après six opérations (*d*); puisque la différence 161 des logarithmes des nombres 54060 & 54058, entre lesquels le nombre donné est interposé, ne peut être réduite à cette différence 2, qu'après en avoir pris la moitié de la moitié de la moitié, & ainsi de suite, jusqu'à six fois †.

† Voyez la cinquiéme Table, à la fin de ce Traité.

82. ENFIN, si le nombre donné n'étant point lui-même un nombre premier, ne peut cependant être réduit par la division qu'à un quotient qui soit un nombre premier plus grand que 10000; alors on considérera le nombre donné comme étant un nombre premier, & l'on cherchera son logarithme par le N° précedent. Ou bien, on le réduira par la division à un quotient qui sera un nombre premier, & l'on cherchera par le N° 82 le logarithme de ce quotient: on ajoûtera ensuite à ce logarithme ceux des diviseurs que l'on aura employés pour réduire à ce quotient le nombre donné; & la somme sera le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 3567894 qui ne peut être réduit par la division, qu'à ce quotient 54059, lequel est un nombre premier plus grand que 10000; on considérera le nombre proposé comme étant un nombre premier, & l'on cherchera son logarithme par le N° 81. Ou bien, on cherchera (a) le logarithme 4.7328679 du quotient 54059 : on ajoûtera ensuite à ce logarithme les logarithmes 0.3010300, 0.4771212 & 1.0413927 des diviseurs 2, 3 & 11 que l'on aura employés pour réduire à ce quotient le nombre proposé; & la somme 6.5524118 sera le logarithme demandé.

(a) N. 81.

Secondement.

83. *Lorsque le nombre donné ne se trouve*

point dans la Table, parce qu'il est fractionnaire †.

84. COMME une fraction est toujours le quotient exact de son numérateur divisé par son dénominateur, si après avoir réduit le nombre donné & sa fraction en une seule fraction, on retranche le logarithme, du dénominateur de cette derniére fraction, du logarithme de son numérateur; la différence, c'est-à-dire le reste, qui sera le logarithme du quotient de ce numé-
(a) N. 55. rateur divisé par son dénominateur (*a*), sera par conséquent le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple $937\frac{5}{6}$, on commencera par le réduire en une seule fraction $\frac{5627}{6}$. On retranchera ensuite le logarithme 0.7781512 du dénominateur 6 de cette fraction, du logarithme 3.7502769 du numérateur 5627 de cette même fraction; & le reste 2.9721257 sera le logarithme demandé.

85. MAIS si l'un des termes de la fraction en laquelle on aura réduit le nombre proposé, ne se trouve point dans la Table, parce qu'il sera exprimé par plus de quatre chiffres, ou si aucun

† Ce que l'on dit des nombres fractionnaires, doit aussi s'entendre des nombres qui sont accompagnés de sous-especes, par exemple de ceux-ci, 17 toises, 3 pieds, 5 pouces; 29 liv. 13 sols, 8 deniers, &c. puisque ces sous-especes 3 *pieds*, 5 *pouces*; 13 *sols*, 8 *deniers*, &c. ne sont que des fractions dont les dénominateurs sont déterminés à toujours être ou 6, ou 72, ou 20, ou &c. & par conséquent les nombres 17 toises, trois pieds, 5 pouces; 29. liv. 13 s. 8 den. &c. se réduisent à ceux-ci $17\frac{41}{72}$, $29\frac{41}{60}$, &c.

des termes de cette même fraction ne s'y trouve, parce qu'ils seront exprimés chacun par plus de quatre chiffres; alors on cherchera le logarithme de ce terme, ou les logarithmes de ces deux termes, de la maniére dont on a dit (a) qu'il falloit s'y prendre pour trouver le logarithme d'un nombre exprimé par plus de quatre chiffres. Ensuite, du logarithme du terme qui sera le numérateur de la fraction en laquelle on aura réduit le nombre proposé; on retranchera le logarithme du terme qui sera le dénominateur de cette même fraction, de même qu'on l'a fait dans le N° précedent; & le reste sera le logarithme demandé.

(a) N. 79.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple $1257\frac{8}{43}$, on commencera par le réduire en une seule fraction $\frac{54059}{43}$, comme l'on a fait dans le N° 84. On cherchera ensuite (b) le logarithme 4.7328679 du numérateur 54059 de cette fraction, lequel ne se trouve point dans la Table, parce qu'il est exprimé par plus de quatre chiffres. Enfin on retranchera de ce logarithme le logarithme 1.6334685 du dénominateur 43 de cette même fraction; & le reste 3.0993994 sera le logarithme demandé.

(b) N. 79.

86. Enfin, si le nombre donné est une fraction moins grande que l'unité, son logarithme sera toujours la différence du logarithme du dénominateur de cette fraction, au logarithme du numérateur de cette même fraction, de

même que lorſqu'il s'agit des nombre fractionnaires qui ſont plus grands que l'unité. Mais alors cette différence ſera *négative*; car, puiſ-
(a) N. 59. que le logarithme de l'unité eſt o (*a*), celui d'un nombre moins grand que l'unité, doit être moins grand que o. Or, les logarithmes de ces ſortes de nombres ſe nomment *Logarithmes négatifs* oû *défectifs*.

Ainſi, le logarithme de cette fraction, par exemple $\frac{3}{4}$, eſt la différence ¶—0.1249388 du logarithme 0.6020600 du dénominateur 4 de cette fraction, au logarithme 0.4771212 du numérateur 3 de cette même fraction. Et il en eſt de même de tout autre exemple.

SCHOLIE I.

87. *Comme les calculs des N°s 80, 81 & 82 ſont un peu longs, voici une autre maniére de trouver le logarithme d'un nombre quelconque plus grand que* 10000.

Premiérement, *on ſéparera du nombre propoſé ſes quatre premiers chiffres à main gauche, parce*
(b) N. 57. *que (b) la Table des logarithmes ne contient point ceux des nombres qui ſont exprimés par plus de quatre chiffres. On fera enſuite des autres chiffres le numérateur d'une fraction, à laquelle on donnera pour dénominateur un nombre décimal compoſé d'autant de zéros qu'il y aura de ces autres chiffres. Et ces quatre premiers chiffres exprimeront avec cette fraction, le quotient du nombre propoſé diviſé par ce nombre décimal.*

¶ Ce ſigne — ſignifie *moins*.

Secondement,

Secondement, *on cherchera dans la Table des logarithmes celui du nombre qui sera exprimé par ces quatre premiers chiffres. Et pour augmenter ce logarithme de la quantité qui sera necessaire pour la fraction qui accompagnera ce nombre, on supposera que les différences des nombres naturels sont proportionnelles à celles des logarithmes de ces nombres*†. *Ainsi l'on fera une régle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, le dénominateur de cette fraction; pour second terme, le numérateur de cette même fraction; & pour troisiéme terme, la différence du logarithme que l'on aura trouvé dans la Table, au logarithme de la même Table, qui lui sera immédiatement supérieur. On ajoûtera ensuite à ce premier logarithme le quatriéme terme de cette proportion, & l'on aura le logarithme de ce quotient.*

Troisiémement *enfin, on ajoûtera à ce dernier logarithme, celui du dénominateur de la fraction de ce même quotient; & la somme, qui sera le logarithme du produit de ce quotient multiplié par ce dénominateur* (a), *sera par conséquent le logarithme du nombre proposé.* (a) N. 51.

Ainsi, si l'on veut trouver par cette maniére le logarithme de ce nombre, par exemple,

† Ce qui n'est cependant point vrai (puisque les différences des nombres naturels sont égales entr'elles, & que celles des logarithmes sont d'autant plus petites, que ces logar. appartiennent à de plus grands nombres) mais qui par cette raison même que ces différences sont d'autant plus petites, que ces logarithmes appartiennent à de plus grands nombres, ne peut causer qu'une erreur peu considérable, lorsqu'il s'agit de très-grands nombres.

4226182617 : premiérement, *on séparera de ses autres chiffres les quatre premiers à main gauche, qui sont* 4226. *On fera ensuite de ces autres chiffres, le numérateur d'une fraction à laquelle on donnera pour dénominateur, le nombre décimal* 1000000, *composé de 6 zéros, parce que ces autres chiffres sont au nombre de six; & l'on aura ce nombre* $4226\frac{182617}{1000000}$ *pour le quotient du nombre proposé divisé par ce nombre décimal* 1000000.

Secondement, *on cherchera dans la Table le logarithme* 3.6259295 *du nombre exprimé par ces quatre premiers chiffres* 4226; *& l'on retranchera ce logarithme du logarithme* 3.6260322 *de la même Table, qui lui est immédiatement supérieur. On fera ensuite une régle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, le dénominateur* 1000000 *de la fraction* $\frac{182617}{1000000}$; *pour second terme, le numérateur* 182617 *de cette même fraction; & pour troisiéme terme, la différence* 1027 *des deux logarithmes précédents* 3.6259295 *&* 3.6260322. *On ajoûtera enfin au premier de ces deux logarithmes, le quatriéme terme de cette proportion, lequel est de* 187 *unités, (ou plutôt de* 188, *puisque ce qui reste de la division que l'on fait pour le trouver, vaut plus de la moitié d'une unité;) & la somme* 3.6259483, *sera le logarithme du quotient* $4226\frac{182617}{1000000}$.

Troisiémement *enfin, on ajoûtera à ce dernier logarithme, celui du nombre décimal*

1000000. (*ce qui se fera* (a) *en augmentant de* (a) N. 53.
six unités sa caractéristique 3); *& la somme* 9.6259483 *sera le logarithme demandé.*

SCHOLIE II.

88. *Comme le nombre des parties du rayon, que chaque sinus contient, est exprimé par plus de quatre chiffres, son logarithme ne se trouve point dans la Table; ainsi l'on est obligé de le chercher par quelqu'un des Nos précedents* 79, 80, 81, 82 *ou* 87. *Or, à mesure que l'on trouve ce logarithme, on l'écrit vis-à-vis du nombre auquel il appartient, dans les colomnes qui sont à côté de celles des tangentes, & ausquelles on donne pour titre*, Logarithmes des sinus †. *Et par ce moyen, on a aussi une Table des logarithmes des nombres qui sont plus grands que* 10000: *mais qui ne contient que ceux de ces logarithmes dont on se sert le plus fréquemment; & ne rend point par conséquent la Table des logarithmes incommode par son volume ni par son étenduë, comme cela arriveroit, si on la prolongeoit autant qu'il le seroit nécessaire, afin que les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des sinus, s'y trouvassent compris.*

89. *Mais il faut remarquer que ces logarithmes que l'on trouve sous le titre de* Logarithmes des sinus, *dans les Tables ordinaires, telles que les petites de* Wlac, *connues aujourd'hui sous les noms des différents Auteurs qui les ont fait réim-*

† Voyez la premiére Table, à la fin de ce livre.

primer †, ne sont point ceux des nombres qui expriment dans ces Tables les valeurs de ces sinus ; parce que ces valeurs y sont déterminées par rapport à un rayon que l'on ne suppose divisé qu'en dix millions de parties, pendant que les nombres ausquels ces logarithmes appartiennent, expriment les valeurs de ces mêmes sinus, calculées sur un rayon que l'on suppose divisé en dix billions de parties, & qui est par consequent exprimé par trois chiffres de plus que le precedent.

90. *Enfin, par les mêmes raisons pour lesquelles on a construit une Table des logarithmes des sinus, on en construit aussi une des logarithmes des tangentes ; c'est-à-dire, des logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des tangentes. Or, on peut aussi trouver ces logarithmes par les mêmes Nos précedents* 79, 80, 81, 82 & 87 ; *mais il est beaucoup plus facile de les chercher par les principes établis aux Nos* 42 & 43, *en se servant des logarithmes, pour faire les régles de proportion que ces principes prescrivent.*

Ainsi, pour construire cette derniére Table, on commence par chercher le logarithme de la tangente de l'arc d'une minute, de la même maniére dont on a dit au N° 44. *qu'il falloit s'y prendre pour trouver la valeur de cette tangente. Excepté* 1ent, *qu'au lieu de multiplier le sinus de l'arc d'une minute, qui est le second terme de la régle de proportion que l'on prescrit de faire dans ce numero, par le sinus total qui en est le troisiéme terme ; on*

† MM. Ozanam, Rivard & de Parcieux, &c.

pose une unité avant la caractéristique 6 du logarithme 6.4637261 de ce premier sinus, afin d'avoir la somme 16.4637261 du logarithme de ce même premier sinus & du log. 10.0000000 du sinus total, & par conséquent (a) le log. du produit de ces deux sinus multipliés l'un par l'autre : 2ent, qu'au lieu de diviser ce produit par le sinus du complément 89d. 59m. de cet arc d'une minute, qui est le premier terme de cette même proportion, on retranche du logarithme 16.4637261 de ce produit, le logarithme 9.9999999 de ce sinus de complément, afin d'avoir ce reste 6.4637262 pour le logarithme du quotient de ce même produit divisé par ce dernier sinus (b) ; & parconséquent pour le logarithme demandé, puisque ce quotient seroit (c) la valeur de cette tangente dont on cherche le logarithme.

(a) N. 53.

(b) N. 55.

(c) N. 44.

On cherche ensuite de la même manière le logarithme de la tangente de l'arc de 2 min., celui de la tangente de l'arc de 3 min. ; & ainsi de suite, jusqu'au logarithme de la tangente de l'arc de 45 deg. inclusivement. Et à mesure que l'on trouve ces logarithmes, on les écrit chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartient, dans les colomnes qu'on leur a destinées à côté de celles des logarithmes des sinus, & ausquelles on donne pour titre, Logarithmes des Tangentes †.

Enfin, on cherche les logarithmes des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. de la

† Voyez la premiere Table, à la fin de ce Traité.

même maniére dont on a dit au N°. 46 qu'il falloit s'y prendre pour trouver ces sortes de tangentes. Excepté, premiérement, qu'au lieu de multiplier par lui-même le sinus total qui est le second & le troisiéme terme de la régle de proportion que l'on prescrit de faire dans ce
(a) N. 60. *numero (a), on double le logarithme* 10.0000000 *de ce même sinus total, afin d'avoir le logarithme* 20.0000000 *de sa seconde puissance. Secondement, qu'au lieu de diviser cette seconde puissance par la tangente du complément de l'arc dont on cherche le logarithme de la tangente, laquelle tangente de complément est le premier terme de cette même proportion; on retranche du logarithme* 20.0000000 *de cette seconde puissance du sinus total, le logarithme de cette tan-*
(b) N. 55. *gente de complément, afin d'avoir pour reste (b) le logarithme du quotient de cette même seconde puissance divisée par cette derniére tangente; & par conséquent le logarithme demandé, puis-*
(c) N. 46. *que ce quotient seroit (c) la valeur de la tangente dont on cherche le logarithme.*

Or à mesure que l'on trouve ces logarithmes, on les écrit de même que l'on a fait les précedents, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartient, dans les colomnes qui leur sont destinées à côté de celles des logarithmes des sinus. Et lorsqu'on a ainsi joint aux Tables précédentes celle des logarithmes de toutes les tangentes qui y sont marquées, il ne reste plus à désirer pour la pratique de la Trigonometrie, que d'avoir de bons instrumens.

Mais il faut aussi remarquer que les logarithmes des tangentes que l'on trouve dans les Tables ordinaires sous le titre qui les indique, ne sont point ceux des nombres qui expriment dans ces Tables les valeurs de ces tangentes, par les mêmes raisons que l'on a dites (a) pour les logarithmes des sinus. (a) N. 89.

CO R O L L A I R E.

91. *Il suit de la manière dont on trouve les logarithmes des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. que* la somme du logarithme de la Tangente d'un arc quelconque & du logarithme de la Tangente du complément de ce même arc, est toujours le double 20000000 du logarithme du sinus total; *& par conséquent, que* si du double 20000000 du logarithme du sinus total, on retranche le logarithme de la Tangente d'un arc quelconque, le reste sera le logarithme de la Tangente du complément de cet arc quelconque.

S C H O L I E III.

92. *Il est souvent nécessaire de sçavoir quel est le logarithme du sinus ou de la tangente d'un arc qui contient des parties de minutes, & dont par conséquent le sinus ni la tangente ne se trouve point dans la Table. Or, on ne peut connoître ce logarithme par aucun des numeros précedents; puisque l'on n'a point le nombre naturel † auquel ce logarithme appartient. Mais*

† On pourroit chercher ce nombre par les Nos 25 ou 48; & l'on trouveroit ensuite son logarithme par quelqu'un des Nos précédents; mais cette voie seroit trop longue.

comme les différences de l'arc de la Table qui précede immédiatement l'arc donné, à ce même arc donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, ne peuvent être alors que très-petites, on peut sans erreur sensible les supposer proportionnelles à celles des logarithmes des sinus de ces arcs, & à celles des logarithmes des tangentes de ces mêmes arcs, de
(a) N. 28. *même que l'on a supposé (a) qu'elles l'étoient à celles de ces mêmes sinus & à celles de ces mêmes tangentes. Et par conséquent, on peut aussi chercher les logarithmes des sinus & des tangentes de ces sortes d'arcs, de la même maniére*
(b) N. 28. *dont on s'y est pris (b) pour trouver les valeurs de ces sinus & de ces tangentes. Excepté qu'il faudra se servir des différences des logarithmes des sinus ou des logarithmes des tangentes des arcs de la Table entre lesquels l'arc donné sera interposé, au lieu de se servir des différences de ces sinus ou de celles de ces tangentes.*

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme du sinus d'un arc, par exemple, de 26d. 16m. 46s. *on fera une régle de proportion dont le premier terme sera* 60 *secondes; le deuxiéme,* 46 *secondes; & le troisiéme, la différence* 2559 *des logar.* 9.6459619 *&* 9.6462178 *des sinus des arcs de* 26d. 16m. *&* 26d. 17m. *entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé & qui se trouvent dans la Table: & la somme* 9.6461581 *du quatriéme terme* 1962 *de cette proportion & du logarithme* 9.6459619 *du sinus de l'arc*

l'arc de 26 d. 16 m. qui précede immédiatement l'arc donné, sera le logarithme demandé.

Et si l'on veut aussi connoître le logarithme de la tangente de ce même arc, on fera aussi une régle de proportion, dont le premier terme sera encore 60 secondes & le deuxiéme 46 secondes; mais pour le troisiéme, on prendra la difference 3183 des logarithmes 9.6932934 & 9.6936117 des tangentes des arcs de 26 d. 16 m. & de 26 d. 17 m. entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table: & la somme 9.6935574 du quatriéme terme 2440 de cette proportion & du logarithme 9.6932934 de la tangente de l'arc de 26 d. 16 m. qui précede immédiatement l'arc donné, sera le logarithme demandé.

PROBLESME II.

93. *Connoître le nombre auquel appartient un logarithme donné.*

Premier Cas.

94. *Lorsque le logarithme donné se trouve dans la Table.*

Si le logarithme donné n'appartient point à un nombre fractionnaire, & n'a point pour caractéristique un nombre plus grand que 3, on le trouvera dans la Table. Ainsi, il sera facile de connoître le nombre auquel il appartiendra, puisque ce nombre est écrit à main gauche de ce logarithme & à côté de lui, dans la colomne des nombres naturels de cette même Table.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple 3.8114409, on le cherchera dans la Table sous sa caractéristique 3 : & l'on trouvera à côté de lui à main gauche, dans la colomne des nombres naturels, ce nombre 6478 pour le nombre demandé.

Second Cas.

95. *Lorsque le logarithme donné ne se trouve point dans la Table.*

Premiérement.

96. Si le logarithme donné ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéristique, qui est un nombre plus grand que 3 : on le considérera comme étant la somme du logarithme que l'on trouvera dans la Table sous la caractéristique 3, & du logarithme d'un nombre décimal qui aura pour caractéristique l'excès de la caractéristique du logarithme donné sur cette caractéristique 3.
(a) N. 53. Ainsi, le nombre demandé sera (a) le produit du nombre auquel appartiendra le logarithme que l'on aura trouvé dans la Table sous cette caractéristique 3, multiplié par le nombre décimal auquel appartiendra cet autre logarithme; & par conséquent, il sera facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 5.6733896 qui ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéris-

tique 5, qui surpasse de deux unités la caracté-ristique 3 sous laquelle on trouve dans cette même Table cet autre logarithme 3.6733896: on considérera ce logarithme donné, comme étant la somme de ce dernier logarithme qui appartient au nombre 4714, & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi, le nombre demandé sera (*a*) le produit de ce nombre 4714 multiplié par ce nombre décimal 100; & par conséquent, ce nombre demandé sera 471400. (*a*) N. 53.

97. Et si le logarithme donné ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéristique, qui est un nombre plus petit que 3 : alors on considérera le logarithme que l'on trouvera dans la Table sous la caractéristique 3, comme étant la somme du logarithme donné, & du logarithme d'un nombre décimal qui aura pour caractéristique l'excès de cette caractéristique 3 sur celle du logarithme donné. Ainsi, le nombre demandé sera (*b*) le quotient du nombre auquel appartiendra le logarithme que l'on aura trouvé dans la Table sous cette caractéristique 3, divisé par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra; & par conséquent, il sera encore facile de connoître le nombre demandé. (*b*) N. 55.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 1.6733896 qui ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéristi-

que 1, qui est plus petite de deux unités que la caractéristique 3 sous laquelle on trouve dans cette même Table cet autre logarithme 3.6733896 : on considérera ce dernier logarithme qui appartient au nombre 4714, comme étant la somme du logarithme donné & du logarithme 2.0000000 du nombre dé-
(a) N. 60. cimal 100. Ainsi, le nombre demandé sera (a) le quotient de ce nombre 4714 divisé par ce nombre décimal 100; & par conséquent ce nombre demandé sera $47\frac{14}{100}$, ou $47\frac{7}{50}$.

Secondement.

98. Si le logarithme donné ayant le nombre 3 pour caractéristique, ses autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous cette caractéristique 3, ce ne sera point parce que le nombre auquel il appartiendra sera plus grand
(b) N. 66. que ceux qui y sont compris, puisque (b) ce nombre ne sera point exprimé par plus de quatre chiffres; mais seulement parce que ce nombre sera fractionnaire, & que par conséquent il sera interposé entre deux des nombres de cette même Table. Or, ces deux nombres entre lesquels ce nombre fractionnaire demandé sera interposé, se suivront immédiatement. Ainsi, si l'on cherche le nombre auquel appartiendra le logarithme de la Table, qui précédera immédiatement le logarithme donné, on connoîtra par ce nombre la partie entière du nombre demandé; & par conséquent, il ne s'agira plus que de trouver sa partie fractionnaire.

Or, pour trouver cette partie fractionnaire, on supposera que les différences des logarithmes sont proportionnelles à celles des nombres ausquels ces logarithmes appartiennent †. Ainsi, l'on fera une régle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, la différence des logarithmes de la Table entre lesquels le logarithme donné sera immédiatement interposé; pour second terme, la différence du logarithme de la Table, qui précédera immédiatement le logarithme donné, à ce même logarithme donné; & pour troisiéme terme, la différence 1 des nombres ausquels appartiendront ces logarithmes de la Table entre lesquels ce même logarithme donné sera immédiatement interposé. On ajoûtera ensuite le quatriéme terme de cette proportion, qui sera la partie fractionnaire du nombre demandé, à la partie entiére du même nombre, que l'on aura déja trouvée; & la somme sera le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 3.6734175 qui ne se trouve point dans la Table, mais qui a le nombre 3 pour caracté-

† Ce qui n'est point vrai, comme on l'a déja remarqué (a); mais ne peut causer qu'une erreur peu considérable, puisque les différences des logarithmes étant d'autant plus petites, que ces logarithmes appartiennent à de plus grands nombres, on exige que la caractéristique du logarithme donné ne soit point de moins de 3 unités, afin que l'on ne prenne les différences que de logarithmes qui appartiennent à des nombres exprimés au moins par quatre chiffres.

(a) N. 87.

riſtique : on fera une régle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, la différence 921 des logarithmes 3.6733896 & 3.6734817 entre leſquels le logarithme donné eſt immédiatement interpoſé, & qui ſe trouvent dans la Table ; pour ſecond terme, la différence 279 du même logarithme précedent 3.6733896 qui eſt immédiatement inférieur au logarithme donné, à ce même logarithme donné ; & pour troiſiéme terme, la différence 1 des nombres 4714 & 4715 auſquels appartiennent ces deux mêmes logarithmes 3.6733896 & 3.6734817 : & la ſomme $4714\frac{93}{307}$ du quatriéme terme $\frac{279}{921}$ ou $\frac{93}{307}$ de cette proportion, & du nombre 4714 auquel appartient ce logarithme 3.6733896 qui précede immédiatement le logarithme donné, ſera le nombre demandé †.

Troiſiémement.

99. Si le logarithme donné ayant un nombre plus grand que 3 pour caractériſtique, ſes autres chiffres ne ſe trouvent point dans la Table ſous la caractériſtique 3 : on le conſidérera comme étant la ſomme d'un logarithme qui aura ce nombre 3 pour caractériſtique & ne ſe trouvera point dans la Table, & du logarithme d'un nombre décimal dont la caractériſtique ſera l'excès de la caractériſ-

† Comme cette proportion aura toujours l'unité pour troiſiéme terme, le quatriéme ſera toujours une fraction qui aura le ſecond terme de cette même proportion pour numérateur, & le premier pour dénominateur.

tique du logarithme donné sur cette caracté-ristique 3. Ainsi le nombre demandé sera (a) le produit du nombre auquel appartiendra ce logarithme qui aura le nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point dans la Table, multiplié par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra; & par conséquent il sera facile de connoître le nombre demandé. (a) N. 53.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 5.4750412 dont la caractéristique est plus grande que le nombre 3, & dont les autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : on considérera ce logarithme comme étant la somme du logarithme 3.4750412 qui a le nombre 3 pour caractéristique, & ne se trouve point dans la Table, & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi le nombre demandé sera (b) le produit du nombre $2985\frac{323}{485}$ auquel on trouvera (c) que ce logarithme 3.4750412 appartient, multiplié par ce nombre décimal 100; & par conséquent ce nombre demandé sera $29856 6\frac{12}{97}$. (b) N. 53. (c) N. 98.

100. ET si le logarithme donné ayant un nombre moins grand que 3 pour caractéristique, ses autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : alors on considérera un logarithme qui aura ce nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point

dans la Table, comme étant la somme du logarithme donné, & du logarithme d'un nombre décimal dont la caractéristique sera l'excès de cette caractéristique 3 sur celle de ce logarithme donné. Ainsi, le nombre demandé
(a) N. 55. sera (a) le quotient du nombre auquel appartiendra ce logarithme, qui aura le nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point dans la Table, divisé par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra ; & par conséquent, il sera facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 1.4750412 dont la caractéristique est moins grande que le nombre 3, & dont les autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : on considérera ce logarithme 3.4750412 qui a le nombre 5 pour caractéristique & ne se trouve point dans la Table, comme étant la somme du logarithme donné & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi, le
(b) N. 55. nombre demandé sera (b) le quotient du nom-
(c) N. 98. bre $2985\frac{323}{485}$ auquel on trouvera (c) que ce logarithme 3.4750412 appartient, divisé par ce nombre décimal 100 ; & par conséquent ce nombre demandé sera $29\frac{10387}{12125}$, ou $29\frac{8566}{10000}$, si l'on réduit la fraction en fraction décimale †.

† On réduit une fraction en fraction décimale, en faisant une régle de proportion, à laquelle on donne pour premier terme le

Quatriémement.

Quatriémement.

101. Enfin, si le logarithme donné est défectif, il ne se trouvera point dans la Table; puisque (a) il appartiendra alors à une fraction qui sera moins grande que l'unité. Mais comme le numérateur d'une fraction est toujours égal au produit de cette même fraction multipliée par son dénominateur, le logarithme du numérateur d'une fraction, est aussi toujours la somme du logarithme de cette fraction & du logarithme du dénominateur de cette même fraction (b). Ainsi, si l'on ajoûte au logarithme donné celui du nombre aussi donné, ou que l'on voudra donner, pour dénominateur à la fraction à laquelle ce premier logarithme appartiendra, & si l'on cherche ensuite par quelqu'un des N^os précedents, le nombre dont la somme de ces deux logarithmes sera le logarithme, ce nombre sera le numérateur de la fraction demandée; & par conséquent on connoîtra la valeur de cette fraction, puisque son dénominateur qui est donné, ou que l'on aura pris à volonté, est connu.

(a) N. 86.

(b) N. 53.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, —0.5118833 qui est défectif, & qui par conséquent ne peut convenir qu'à une fraction moins grande que l'unité: on ajoûtera à ce logarithme donné celui du nombre que l'on

dénominateur de la fraction que l'on veut réduire; pour second terme, le numérateur de la même fraction; & pour troisiéme terme, le nombre décimal que l'on veut.

voudra donner pour dénominateur à la fraction demandée ; par exemple, le logarithme 2.0000000 du nombre décimal 100, si l'on veut que ce dénominateur soit 100. On cherchera ensuite par quelqu'un des numéros précedents, le nombre auquel appartient ce logarithme 1.4881167, qui est la somme des deux logarithmes précedents — 0.5118833 & 2.0000000 ; & comme on trouvera qu'il appartient à ce nombre 30, du moins à peu de chose près, on en concluera que cette fraction $\frac{30}{100}$ ou $\frac{3}{10}$ sera le nombre demandé.

SCHOLIE I.

102. *Comme les logarithmes different d'autant moins entr'eux qu'ils appartiennent à de plus grands nombres, plus les nombres ausquels appartiendront les logarithmes dont on se servira pour connoître le nombre auquel appartient un logarithme qui ne se trouve point dans la Table, seront grands, & plus le nombre que l'on trouvera sera exact. De maniére que si pour connoître le nombre auquel ce logarithme 1.4750412 appartient, on se servoit des logarithmes 1.4623980 & 1.4771212 entre lesquels il est immédiatement interposé, on trouveroit ce nombre 29.$\frac{3951}{4601}$ qui est beaucoup plus grand, mais bien moins exact, que cet autre, 29.$\frac{10187}{13125}$ que l'on a trouvé par le N° 99.*

Mais lorsqu'il n'est point nécessaire de connoître avec une précision rigoureuse le nombre demandé, on retranche du logarithme donné, ou

on lui ajoûte, le logarithme du nombre décimal qu'il faut en retrancher, ou lui ajoûter, pour le changer en un autre logarithme dont le nombre 3 soit la caractéristique (a). On cherche ensuite (a) N. 99.
le nombre auquel appartient le logarithme de la Table, qui précede immédiatement cet autre logarithme. Enfin, l'on ajoûte à ce nombre autant de zeros, ou l'on en retranche autant de chiffres, que l'exige le nombre décimal auquel appartient le logarithme que l'on a retranché du logarithme donné, ou qu'on lui a ajoûté; & l'on prend le produit ou le quotient pour le nombre demandé.

Ainsi l'on trouve par cette derniére maniére, que ce logarithme 5.4750412, appartient au nombre 298500; & que celui-ci 1.4750412, appartient au nombre $29\frac{17}{20}$.

SCHOLIE II.

103. *Il est souvent nécessaire de connoître la valeur de l'arc auquel appartient † le logarithme d'un sinus ou d'une tangente, qui, parce que cet arc contient des parties de minutes, ne se trouve point dans la Table. Or, on ne peut trouver la valeur de cet arc par aucun des cas du problême précedent, puisque cette valeur n'est point exprimée par le nombre naturel auquel ce*

† Les logarithmes dont il s'agit ici, n'*appartiennent* point immédiatement aux arcs, puisqu'ils ne sont point les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs de ces arcs: mais ils leur *appartiennent* relativement, puisqu'ils sont les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des sinus & des tangentes de ces mêmes arcs.

logarithme appartient. Mais si l'on suppose, de même qu'on l'a fait au N° 92, & par les mêmes raisons, que les différences du logarithme de la Table qui précede immédiatement le logarithme donné, à ce même logarithme donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, sont proportionnelles à celles des arcs ausquels ces logarithmes appartiennent, on résoudra ce problême de la même maniére dont on a résolu celui du même N° 92.

Ainsi, si l'on veut connoître l'arc auquel appartient ce logarithme, par exemple, 9.6461580 *qui est le logarithme d'un sinus : on fera une régle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, la différence* 2559 *des logarithmes* 9.6459619 *&* 9.6462178 *entre lesquels le logarithme donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table; pour second terme, la différence* 1961 *du même logarithme précedent* 9.6459619 *qui est immédiatement inférieur au logarithme donné, à ce même logarithme donné; & pour troisiéme terme,* 60 *secondes. On ajoûtera ensuite le quatriéme terme de cette proportion, lequel est* 46 *secondes, du moins à peu de chose prés, à la valeur* 26 d. 16 m. *de l'arc auquel appartient ce logarithme* 9.6459619 *qui précede immédiatement le logarithme donné; &* *la somme* 26 d. 16 m. 46 f. *sera* (a) *la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc.*

(a) N. 6.

On cherche de la même maniére l'arc auquel

ppartient le logarithme d'une tangente qui ne se trouve point dans la Table : excepté que l'on se sert des différences des logarithmes des tangentes, au lieu de se servir de celles des logarithmes des sinus.

CHAPITRE V.

De la maniére de se servir des Logarithmes.

104. SI au lieu de retrancher le logarithme du premier terme d'une régle de proportion, de la somme des logarithmes des termes moyens de cette même régle, on en retranche le nombre décimal qui est immédiatement supérieur au logarithme de ce premier terme; on ôtera de cette somme le *Complément* † de ce même dernier logarithme, de plus que ce que l'on doit en ôter pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette proportion. Ainsi, il s'en faudra de ce complément que ce qui restera de cette somme aprés en avoir ôté ce nombre décimal, ne soit égal au logarithme de ce quatriéme terme ; & par conséquent, si l'on ajoûte au reste ce même complément, la somme sera le logarithme de ce quatriéme terme.

† On appelle *Complément* d'un logarithme, la différence de ce logarithme au nombre décimal qui lui est immédiatement supérieur. Ainsi, le *Complément* de ce logarithme, par exemple, 1.4913617, est sa différence 8.5086383 au nombre décimal 10.0000000 qui lui est immédiatement supérieur.

Par exemple, 2.7951846 eſt la ſomme des logarithmes 1.5910646 & 1.2041200 des termes moyens 39 & 16 de cette proportion 24 : 39 :: 16 : *. Or, ſi au lieu de retrancher de cette ſomme le logarithme 1.3802112 du premier terme 24, on en retranche ce nombre 100000000 qui eſt le nombre décimal immédiatement ſupérieur à ce dernier logarithme; on ôtera de cette ſomme le complément 8.6197888 de ce même dernier logarithme, de plus que ce que l'on doit en ôter pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette proportion. Ainſi, il s'en faudra de ce complément que la différence — 7.2048154 de ce nombre décimal à cette ſomme, ne ſoit égale au logarithme de ce quatriéme terme; & par conſéquent, ſi à cette différence — 7.2048154, on ajoûte ce même complément 8.6197888, la ſomme 1.4149734 ſera le logarithme de ce quatriéme terme.

On peut donc également avoir le logarithme du quatriéme terme d'une régle de proportion, en retranchant le logarithme de ſon premier terme, de la ſomme des logar. de ſes termes moyens: ou en retranchant de la ſomme du complément du logar. de ce premier terme & des logarithmes de ces termes moyens, le nombre décimal qui eſt immédiatement ſupérieur au logarithme de ce même premier terme. Ainſi l'on peut également réſoudre par ces deux maniéres tous les problêmes qui dé-

pendent des proportions ; mais on doit préférer la derniére, parce qu'elle sera la plus courte & la plus facile, lorsque l'on s'en sera rendu la pratique familiére. Or pour cet effet il faut remarquer :

105. PREMIEREMENT, que si le sinus total se trouve au premier terme d'une régle de proportion, on ne doit point se servir de la régle du complément *Logarithmétique* ; parce que le logarithme du sinus total est un nombre décimal, & qu'il n'y a rien de plus facile que de retrancher d'un nombre quelconque, un nombre décimal.

Ainsi, pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette proportion, par exemple, *sin. total* . *tang. de* $53^{d.}40^{m.}$ :: $637\frac{13}{20}$ *tois.* : * il faut ajoûter le logarithme 10.1334356 de la tangente de 53 *deg.* 40 *min.* au logar. 2.8045823 du nombre naturel $637\frac{13}{20}$ (a) ; retrancher ensuite de leur somme 12.9380199, le logarithme 10.0000000 du sinus total ; & le reste 2.9380179 sera le logarithme demandé. (a) N. 83.

Logarithme de la Tangente de 53 d. 40 m.	10.1334356.
Logarithme du nombre naturel $637\frac{13}{20}$ - - -	2.8045823,
Somme - - - - - - - - - - - - - -	12.9380179.
Logarithme du sinus total - - - - - - -	10.0000000.
Logarithme demandé - - - - - - - - - -	2.9380179.

qui (b) donne le nombre $866\frac{833}{635}$ ou 867 *p. m.* pour le quatriéme terme de la proportion dont il s'agit. (b) N. 99.

106. SECONDEMENT, que puisqu'un loga-

rithme quelconque & son complément étant joints ensemble, forment toujours un nombre (a) N. 104. décimal (a); chaque chiffre du complément d'un logarithme quelconque, doit toujours exprimer ce qui manque pour valoir 9 à celui des chiffres de ce même logarithme qui lui répond: excepté le dernier à main droite, qui étant joint à son correspondant doit faire 10.

Ainsi, l'on aura le complément de ce logarithme, par exemple, 2.8045976, en posant un 7 au lieu du 2 qui est son premier chiffre à main gauche; un 1 au lieu du 8, un 9 au lieu du 0, un 5 au lieu du 4, un 4 au lieu du 5, un 0 au lieu du 9, un 2 au lieu du 7, & enfin un 4 au lieu du 6 qui est son dernier chiffre à main droite; & par conséquent ce nombre 7.1954024 sera le complément du logarithme proposé.

Logarithme - - - - - - - - - - - - 2.8045976.
Complément - - - - - - - - - - - - 7.1954024.

107. TROISIÈMEMENT, qu'aucun des nombres naturels inférieurs à 10.0000000, n'a pour nombre décimal immédiatement supérieur à son log. que ce même nombre 10000000 † qui est le logarithme du sinus total. Par conséquent, lorsque le logarithme du premier terme

† Les neuf premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9 sont aussi compris dans cette proposition : parce que l'on considere la caractéristique 0 de leurs logarithmes, comme faisant partie de ces logarithmes; & que par cette raison, l'on pose un 9 au lieu de (a) N. 106. ce 0, lorsque l'on prend (a) les complémens de ces mêmes logarithmes.

d'une

[d']une régle de proportion quelconque, ne surpasse point ce nombre 100000000, le logarithme du quatriéme terme de cette régle, est toujours la différence du logarithme du sinus total à la somme du complément du logarithme du premier terme de cette même régle & des logarithmes de ses termes moyens.

Ainsi, l'on aura le logarithme 3.1638032 du quatriéme terme de cette proportion, par exemple, *sinus de* 35$^{d.}$ 10$^{m.}$: *sinus de* 76$^{d.}$ 25$^{m.}$: : 864 *toises* : *, en ajoûtant ensemble le complément 0.2396101 du logarithme du premier terme de cette même proportion, & les logarithmes 9.9876794 & 2.9365137 de ses termes moyens; & en retranchant ensuite de leur somme 13.1638032, le logarithme du sinus total, c'est-à-dire, 10.0000000.

Compl. du log. 9.7603899 *du sinus de* 35 *d.* 10 *m.*	0.2396101.
Logarithme du sinus de 76 *deg.* 25 *min.* - -	9.9876794.
Logarithme du nombre naturel 864. - -	2.9365137.
Somme - - - - - -	13.1638032.
Logarithme du sinus total - - -	10.0000000.
Logarithme demandé - - - - -	3.1638032.

qui (a) donne ce nombre 1458$\frac{457}{1978}$ ou 1458$\frac{3}{16}$ *p.p.* pour le quatriéme terme de la proportion dont il s'agit. (a) N. 98.

108. QUATRIÈMEMENT, que lorsque le logarithme du premier terme d'une régle de proportion surpasse ce nombre 100000000, (ce qui n'arrive dans la pratique de la Trigonométrie qui fait ici notre principal objet, que lorsque ce premier terme est une tangente d'un arc de plus de 45 degrés,) il est plus court

de prendre pour le complément du logarithme de ce premier terme, la différence de ce logarithme au double du logarithme du ſinus total, que celle de ce même logarithme au nombre décimal qui lui eſt immédiatement ſupérieur. Parce que cette premiére différence étant toujours (a) le logarithme de la tangente du complément de l'arc dont il s'agit, elle ſe trouve toute calculée dans les colomnes des logarithmes des tangentes; & qu'il n'eſt pas plus difficile de retrancher 20000000 de la ſomme du complément du logarithme du premier terme d'une régle de proportion & des logarithmes de ſes termes moyens, que d'en retrancher 10000000.

(a) N. 91.

Ainſi, l'on aura le logarithme 2.8045835 du quatriéme terme de cette proportion, par exemple, *tang. de* $53^{d.}$ $40^{m.}$: *ſinus total* :: 867 *toiſes* : *, en ajoûtant enſemble le logarithme 9.8665644 de la tangente du complément du premier terme de cette même proportion, & les logarithmes 10.0000000 & 2.9380191 de ſes termes moyens; & en retranchant de leur ſomme 22.8045835, le double 20.0000000 du logar. du ſinus total.

Logar. de la Tang. du Compl. de 53 d. 40 m. -	9.8665644.
Logarithme du ſinus total - - -	10.0000000.
Logar. du nombre naturel 867 - - -	2.9380191.
Somme - - - - - - -	22.8045835.
Double du logarithme du ſinus total - - -	20.0000000.
Logarithme demandé - - - - -	2.8045835.

(b) N. 100. qui (a) donne ce nombre $637 \frac{2219}{3705}$ ou $637\frac{13}{30}$ *p. p.* pour le quatriéme terme de la proportion dont il s'agit.

109. CINQUIE'MEMENT, que toutes les caractériſtiques des logarithmes ſont des nombres homologues †. Ainſi, puiſque le logarithme du ſinus total eſt un nombre décimal, on le retranchera de la ſomme du complément du logarithme du premier terme d'une régle de proportion & des logarithmes de ſes termes moyens (lorſqu'il ſera poſſible de le faire) en ôtant ſa caractériſtique (laquelle eſt 10,) de la caractériſtique de cette ſomme. Et l'on retranchera ſon double, de la même ſomme, en ôtant la caractériſtique de ce double (laquelle eſt 20,) de la caractériſtique de cette même ſomme.

Ainſi, pour retrancher le logarithme du ſinus total, par exemple, de la ſomme précédente 13.1638032 (a), il n'y a qu'à ſupprimer le 1 qui eſt le premier chiffre à main gauche de la caractériſtique 13 de cette ſomme. Et pour retrancher le double du logarithme du ſinus total, par exemple, de l'autre ſomme précédente 22.8045835 (b), il ſuffit de ſupprimer le 2 qui eſt le premier chiffre à main gauche de la caractériſtique 22 de cette autre ſomme.

(a) N. 107.
(b) N. 108.

110. SIXIE'MEMENT, que pour retrancher un nombre, de la ſomme qu'il formeroit avec d'autres nombres, il ſuffit de ne le point comprendre dans cette ſomme. Et par conſéquent,

† J'appelle nombres *Homologues*, c'eſt-à-dire, *de même nom*, les unités & les unités, les dixaines & les dixaines, les centaines & les centaines, &c.

pour retrancher le logarithme du sinus total, de la somme du complement du logarithme du premier terme & des logarithmes des termes moyens d'une régle de proportion , dont le sinus total est l'un de ces termes moyens , il suffit de le supprimer.

Ainsi l'on aura, par exemple, le logarithme 10.1334356 du quatriéme terme de cette
(a) N. 108. proportion, $637\frac{11}{20}$ *toises p.p.* (*a*) : 867 *toises* :: *sinus total* : *tangente de* ✱, en ajoûtant le complément 7.1954165 du logarithme de son premier terme, au logarithme 2.9381091 de son second terme.

Compl. du log. 2.8045835 *du nomb. nat.* $637\frac{11}{20}$ *p.p.*	7.1954165.
Logarithme du nombre naturel 867 - - -	2.9380191.
Logarithme du sinus total - - - - -	
Somme - - - - - -	10.1334356.

qui est le logarithme de la tangente de 53 deg. 40 m. & donne par conséquent cette tangente, pour le quatriéme terme de la proportion dont il s'agit.

111. SEPTIÉMEMENT enfin, que lorsqu'on
(b) N. 110. aura supprimé (*b*) le logarithme du sinus total qui se sera trouvé au second ou au troisiéme terme d'une régle de proportion, dont le logarithme du premier terme sera plus grand que celui de ce même sinus total ; il faudra pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette régle, retrancher encore 10 de la caractéristique de la somme du complément du logarithme du premier terme de cette même régle,

& du logarithme de celui de ses termes moyens qui ne sera point le sinus total. Car, lorsque le logarithme du premier terme d'une régle de proportion, est plus grand que celui du sinus total, il faut pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette régle, retrancher le double du logarithme du sinus total (ou ce qui revient au même, deux fois le logar. du sinus total,) de la somme du complément du logar. du premier terme de cette même régle & des logarithmes de ses termes moyens (*a*). Or, en supprimant le logarithme du sinus total, on ne l'aura retranché qu'une fois de cette somme. Il faudra donc l'en retrancher encore une fois. Et par conséquent, il faudra (*b*) retrancher 10 de la somme du complément du logarithme du premier terme de la proportion dont il s'agira, & du logarithme de celui de ses termes moyens qui ne sera point le sinus total; puisque cette derniére somme sera (*c*) ce qui restera de la premiére, après en avoir ôté le logarithme du sinus total.

(a) N. 108.
(b) N. 109.
(c) N. 110.

Ainsi, pour avoir le logarithme du quatriéme terme de cette proportion, par exemple, *tangente de* $53^{d.}$ $40^{m.}$: *sinus total* :: 867 *toises* : *, on ajoûtera le complément du logarithme de son premier terme, c'est-à-dire, le logarithme 9.8665644 de la tangente du complément de $53^{d.}$ $40^{m.}$, au logarithme 2.9380191 de son troisiéme terme; & l'on supprimera ensuite (*d*) le 1 qui est le premier

(d) N. 109.

chiffre à main gauche de la caractéristique 12 de la somme 12.8045835 de ces deux logarithmes.

Logar. de la tang. du compl. de 53 d. 40 m.	9.8665644.
Logarithme du sinus total. - - - - - - - -	-
Logarithme du nombre naturel 867 - - - -	2.9380191.
Somme - - - - - - - - - -	12.8045835.

(a) N.100. qui donne ce logarithme 2.8045835, & par conséquent (a) ce nombre $637\frac{13}{20}$ *p. p.* pour le quatriéme terme de la proportion dont il s'agit.

Fin du premier Livre.



LIVRE SECOND.

De la Trigonométrie-rectiligne.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes de la Trigonométrie-rectiligne.

PROPOSITION I. Théorême.

112. *DANS un triangle-rectiligne quelconque, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés* †.

Dans le triangle ABC *, le côté AB est au côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B : le côté AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A : enfin, le côté AC est au côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A. * Fig. 16.

Constr. Inscrivez dans un cercle quelconque Z, un triangle DEF équiangle au triangle ABC *(a)*; & divisez en deux parties égales, aux points G, H & I *(b)*, chaque côté de ce triangle inscrit. (a) E. l. 4. p. 2. (b) E. l. 1. p. 10.

Démonstr. Les triangles ABC & DEF sont équiangles [c]. Ainsi, *(c)* les côtés AB, AC & BC (c) E. l. 6. p. 4.

† Ce Théorême est suffisamment démontré par ce qui a été dit au premier chapitre de la premiére section du Livre précédent. Ainsi, si on le démontre ici immédiatement, ce n'est qu'afin de présenter de suite au Lecteur, toutes les Propositions sur lesquelles la pratique de la Trigonométrie-rectiligne est fondée.

du premier, ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés DE, DF & EF du ſecond. Or, ces côtés DE, DF & EF ont auſſi entr'eux les mêmes rapports que leurs moitiés DG, DH &
(a) E. l. 5. p. 15. FI (a); & ces moitiés DG, DH & FI ſont (b)
(b) N. 4. les ſinus des angles F, E & D qui leur ſont oppoſés. Donc les côtés AB, AC & BC ont entr'eux les mêmes rapports que les ſinus des
(c) E. l. 5. p. 11. angles F, E & D (c). Mais ces angles F, E & D ſont égaux aux angles C, B & A, chacun à chacun [c]. Donc les ſinus des angles F, E & D ſont auſſi ceux des angles C, B & A, chacun de chacun. Et par conſéquent les côtés AB, AC & BC ont entr'eux les mêmes rapports que les ſinus des angles C, B & A. Donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

* Fig. 16. 113. *Si l'on ſuppoſe que le cercle* Z* *eſt celui dont on s'eſt ſervi pour calculer la Table des ſinus, c'eſt-à-dire, que le rayon du cercle* Z *eſt diviſé en autant de parties égales que le ſinus total de cette Table en exprime; les nombres qui expriment dans cette même Table les valeurs des ſinus des arcs qui ſont les meſures des angles* A, B *&* C *du triangle* ABC, *exprimeront celles des demi-côtés* FI, DH *&* DG *du triangle* DEF *équiangle à ce triangle* ABC. *Ainſi voyez les Nos 1. & 2.*

PROPOSITION II. Théorême.

114. *Dans un triangle rectiligne quelconque, iſoſcele ou ſcalêne, la ſomme des deux côtés inégaux eſt à la différence de ces deux mêmes côtés, comme*

mme la tangente de la moitié de la somme des ngles qui sont opposés à ses côtés, est à la tannte de la moitié de la difference de ces mêmes ngles.

Dans le triangle ABC *, la somme des côtés, r exemple, BC & BA, est à la difference de s mêmes côtés, comme la tangente de la oitié de la somme des angles BAC & BCA t à la tangente de la moitié de la difference e ces mêmes angles. * Fig. 17.

Constr. Du point B pris pour centre; & avec le plus petit BC des deux côtés proposés pris pour rayon, décrivez un cercle DCE. Tirez du point D au point C, une ligne droite DC. Tirez aussi du point A, une parallele indéfinie AF à cette ligne DC (*a*). Prolongez le côté BA vers E, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point E le cercle DCE. Tirez du point E par le point C, une ligne droite ECF qui rencontre en un point F la parallele AF. Enfin décrivez un quart de cercle quelconque GHI. De l'extrêmité I du rayon GI, élevez à ce même rayon une perpendiculaire indéfinie IL (*b*); & faites les angles LGI & KGI égaux aux angles EAF & CAF, chacun à chacun (*c*).

(*a*) E. l. 1. p. 31.
(*b*) E. l. 1. p. 11.
(*c*) E. l. 1. p. 23.

Démonstr. Premierement, la ligne EA est la somme des côtés BC & BA du triangle ABC; puisque les lignes BE & BC qui sont des rayons d'un même cercle DCE [c], sont égales. Et la ligne DA est la difference des deux mêmes côtés BC & BA; puisque les lignes BD & BC

qui ſont auſſi des rayons d'un même cercle DCE [c], ſont auſſi égales.

Secondement, l'angle BDC eſt égal à l'angle BCD (*a*); puiſque [D] les côtés BC & BD du triangle DBC ſont égaux. Or, la ſomme de ces deux angles eſt égale à celle des angles BAC & BCA (*b*); puiſque l'angle B eſt commun aux triangles DBC & ABC. Donc l'angle BDC eſt égal à la moitié de la ſomme des angles BAC & BCA. Mais ce même angle BDC eſt auſſi égal à l'angle EAF (*c*); puiſque les lignes DC & AF ſont paralleles [c]: & l'angle EAF eſt égal à l'angle LGI [c]. Donc l'angle LGI eſt auſſi égal à la moitié de la ſomme des angles BAC & BCA; & par conſéquent, puiſque la ligne LI eſt la tangente de cet angle LGI (*d*), elle eſt celle de la moitié de la ſomme de ces angles BAC & BCA.

(*a*) E. l. 1. p. 5.

(*b*) E. l. 4. p. 32.

(*c*) E. l. 1. p. 29.

(*d*) N. 38.

Troiſiémement, l'angle BCD eſt égal à l'angle BDC [D]. Or l'angle BDC qui eſt extérieur au triangle ADC, eſt égal (*e*) à la ſomme des angles intérieurs DAC & DCA qui lui ſont oppoſés. Donc l'angle BCD eſt égal à la ſomme des angles DAC & DCA; & par conſéquent, ſi à ce premier angle & à la ſomme de ces deux derniers, on ajoûte le même angle DCA, la ſomme des angles BCD & DCA, c'eſt-à-dire, l'angle BCA, ſera égale à celle des angles DAC, DCA & DCA. Ainſi l'angle BCA ſurpaſſe l'angle DAC ou BAC de deux fois l'angle DCA; & par conſéquent cet

(*e*) E. l. 1. p. 32.

angle DCA est la moitié de la différence des angles BAC & BCA. Mais ce même angle DCA est égal à l'angle CAF (a); puisque les lignes DC & AF sont paralleles [c] : & l'angle CAF est égal à l'angle KGI [c]. Donc l'angle KGI est egal à la moitié de la différence des angles BAC & BCA; & par conséquent, puisque la ligne KI est la tangente de cet angle KGI (b), elle est celle de la moitié de la différence de ces mêmes angles BAC & BCA.

(a) E. l. 1. p. 29.

(b) N. 38.

Quatriémement enfin, la ligne AF est parallele à la ligne DC [c]; & l'angle DCE est droit (c), puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle. Donc l'angle AFE est droit aussi (d). Ainsi, puisque la ligne IL est perpendiculaire au rayon GI [c], les triangles AEF & GLI qui ont l'angle EAF égal à l'angle LGI [c], ont aussi l'angle AFE égal à l'angle GIL : les triangles ACF & GKI qui ont l'angle CAF égal à l'angle KGI [c], ont pareillement l'angle AFC égal à l'angle GIK; & par conséquent ces deux premiers triangles sont équiangles, & ces deux derniers le sont aussi (e). Or, puisque les triangles AEF & GLI sont équiangles, AF : GI : : EF : LI (f). Et puisque les triangles ACF & GKI le sont aussi, AF : GI : : CF : KI (g). Donc EF : LI : : CF : KI (h); & par conséquent en échangeant (i), EF : CF : : LI : KI. Mais puisque la ligne DC est parallele [c] au côté AF du triangle AEF, ED : DA : : EC : CF (k). Donc en composant, EA : DA :

(c) E. l. 3. p. 31.

(d) E. l. 1. p. 29.

(e) E. l. 1. p. 32.

(f) E. l. 6. p. 4.

(g) E. l. 6. p. 4.

(h) E. l. 5. p. 11.

(i) E. l. 5. p. 16.

(k) E. l. 6. p. 2.

(a) E. l. 5. p. 18. EF : CF (a) ; & par conséquent, EA : DA :: (b) E. l. 5. p. 11. LI : KI (b).

Or, EA est la somme des côtés BC, & BA du triangle ABC [D. 1.] : DA est la différence de ces mêmes côtés [D. 1.] : LI est la tangente de la moitié de la somme des angles BAC & BCA [D. 2.] : & KI est la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles [D. 3.]. Donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

115. *Si l'on suppose que le rayon* GI *est celui du cercle dont on s'est servi pour calculer la Table des sinus, les nombres qui expriment dans la Table des tangentes les valeurs des tangentes des arcs qui sont les mesures des angles* EAF *&* CAF *des triangles rectangles* AEF *&* ACF, *exprimeront celles des côtés* LI *&* KI *des triangles rectangles* GLI *&* GKI, *qui sont équiangles, l'un au triangle* AEF, *& l'autre au triangle* ACE, *& décrits chacun sur le rayon du cercle que l'on a pris pour construire la Table des sinus. Ainsi voyez les Nos* 33 *&* 34.

PROPOSITION III. Théorême.

116. *Dans un triangle rectiligne, le rectangle fait de deux côtés quelconques, est au rectangle fait des différences de ces deux mêmes côtés à la moitié de la somme des trois côtés, comme le quarré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle compris par ces deux premiers côtés.*

* Fig. 18. Dans le triangle ABC *, le rectangle fait des

côtés, par exemple AB & AC, est au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC, & de la différence du côté AC à cette même moitié, comme le quarré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle BAC.

Constr. Divisez (a) les angles BAC & BCA chacun en deux parties égales, par des lignes AN & CN. Du point N auquel ces lignes se rencontrent, abbaissez aux côtés AB, AC & BC, les perpendiculaires ND, NE & NF (b). Du même point N pris pour centre, & avec l'une de ces perpendiculaires prise pour rayon, décrivez un cercle DEF. Du point B, abbaissez une perpendiculaire BI (c) à la ligne AN prolongée vers G autant qu'il sera nécessaire. Prolongez cette perpendiculaire vers H, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point H le côté AC. Du point C, abbaissez une perpendiculaire CG à la même ligne ANG (d). Du point I auquel la perpendiculaire BI rencontre la ligne ANG, tirez au côté AC (e) une parallele IK, qui rencontre en un point K la perpendiculaire CG. Du point L auquel la parallele IK rencontre le côté BC, pris pour centre, & avec la ligne LI prise pour rayon, décrivez un cercle IFGKP. Enfin du point G, tirez au centre L de ce cercle, & au point F auquel la perpendiculaire NF rencontre le côté BC, les lignes droites GL & GF.

(a) E. l. 1. p. 9.
(b) E. l. 1. p. 12.
(c) E. l. 1. p. 12.
(d) E. l. 1. p. 12.
(e) E. l. 1. p. 31.

Démonstr. Les triangles AIB, AEN & AGC

(a) E. l. 1. p. 32. sont équiangles (a), puisqu'ils ont chacun un angle droit [c], que l'angle BAI du premier est égal à l'angle EAN du second [c], & que ce même angle EAN est commun au second & au troisiéme. Donc AB : BI :: AN : NE, AC : CG :: AN : NE (b); & par conséquent, si l'on multiplie chaque terme de la premiére de ces deux proportions, par chaque terme correspondant de la seconde, on aura cette nouvelle proportion : le rectangle fait de AB & de AC est au rectangle fait de BI & de CG, comme le quarré de AN est au quarré de NE (c). Or (d) AN est à NE, comme le sinus de l'angle AEN, c'est-à-dire, le sinus total (e), est au sinus de l'angle EAN qui est la moitié de l'angle BAC [c]. Ainsi il ne s'agit plus que de démontrer que le rectangle fait de BI & de CG, est égal au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC, & de la différence du côté AC à cette même moitié; ce que l'on peut faire de la maniére suivante.

(b) E. l. 6. p. 4.

(c) E. l. 6. p. 22.

(d) N. 112.

(e) N. 8. & 9.

Premiérement, dans les triangles AIB & AIH, le côté AI est commun, l'angle BAI est égal [c] à l'angle HAI. & l'angle BIA à l'angle HIA. Ainsi le côté BI est égal au côté HI (f). Or ce côté HI & la ligne CK sont deux côtés d'un quadrilatere HCKI; & ce quadrilatere est un parallelogramme, puisque ses côtés HC & IK sont paralleles [c], & que les lignes BH & CG étant perpendiculaires, chacune à la même

(f) E. l. 1. p. 26.

ligne AG [c], les autres côtés HI & CK sont aussi paralleles (a). Donc le côté HI est égal à la ligne CK (b); & par conséquent les lignes BI & CK sont égales. (a) E. l. 1. p. 28. (b) E. l. 1. p. 34.

Secondement, dans les triangles BIL & CKL, le côté BI est égal au côté CK [D], l'angle LBI à l'angle LCK, & l'angle LIB à l'angle LKC (c), puisque les lignes BH & CG sont paralleles [c]. Ainsi le côté LB est égal au côté LC, & le côté LI au côté LK (d). Or, puisque les côtés LI & LK sont égaux, l'hypoténuse IK du triangle IGK qui est rectangle en G [c], est divisée également au point L. Ainsi le cercle décrit de ce point pris pour centre, & avec la ligne LI prise pour rayon, passe par le sommet de l'angle G (e) & par le point K; & par conséquent les lignes LI, LG & LK sont égales. (c) E. l. 1. p. 29. (d) E. l. 1. p. 26. (e) E. l. 3. p. 31.

Troisiémement, l'angle BAC est double de l'angle GAC [c], & l'angle GAC est égal à l'angle GIL (f), puisque les lignes IK & AC sont paralleles [c]. Donc l'angle BAC est double de l'angle GIL. Or l'angle GLK est aussi double du même angle GIL (g), puisqu'il est l'angle extérieur du triangle ILG dont les côtés LI & LG sont égaux entr'eux [D. 2.]. Donc l'angle GLK est égal à l'angle BAC; & par conséquent, puisque les lignes IK & AC sont paralleles [c], les lignes GL & BA le sont aussi (h). (f) E. l. 1. p. 29. (g) E. l. 1. p. 32. & 5.

Quatriémement, les triangles OFN & OGC (h) E. l. 1. p. 10.

sont rectangles, l'un en F & l'autre en G [c];
(a) E. l. 1. p. 15. & les angles FON & GOC sont égaux (a), puisqu'ils sont opposés au sommet. Donc ces triangles sont équiangles (b); & par conséquent les
(b) E. l. 1. p. 32. côtés OF & ON du premier, sont proportionnels aux côtés OG & OC du second (c). Mais
(c) E. l. 6. p. 4. ces côtés sont aussi ceux des angles FOG & NOC des triangles FOG & NOC, & ces angles sont
(d) E. l. 1. p. 15. égaux (d), puisqu'ils sont opposés au sommet. Donc les triangles FOG & NOC sont aussi
(e) E. l. 6. p. 6. équiangles (e); & par conséquent l'angle OGF du premier est égal à l'angle OCN du second. Or, cet angle OCN est la moitié de l'angle ACB du triangle ABC [c]. Donc l'angle OGF est égal à la moitié de l'angle ACB; & par conséquent, puisque l'angle LGI du triangle ILG qui est isoscele [D. 2.], est égal
(f) E. l. 1. p. 5. à l'angle GIL (f), & que l'angle GIL est égal [D. 3.] à l'angle GAC qui est aussi la moitié de l'angle BAC du triangle précedent ABC [c], l'angle FGL qui est la somme de ces angles OGF & LGI, est égal à la moitié OCN & GAC de la somme des angles ACB & BAC du triangle ABC.

Cinquiémement, dans les triangles FLG
(g) E. l. 1. p. 29. & ABC, l'angle FLG est égal à l'angle ABC (g), puisque les lignes GL & BA sont paralleles [D. 3.]; & l'angle FGL est égal à la moitié OCN & GAC de la somme des angles ACB & BAC [D. 4.]. Donc l'angle GFL est égal à l'autre moitié ACN & GAB de la somme des

mêmes

mêmes angles ACB & BAC (a); & par conséquent les angles FGL & GFL sont égaux. Or, puisque ces derniers angles sont égaux, les côtés LF & LG du triangle FLG le sont aussi (b). Ainsi, le cercle décrit du point L pris pour centre, & qui passe par le point G, passe aussi par le point F; & par conséquent puisque les lignes LB & LC sont égales (D. 2.), les lignes BF & CP le sont aussi.

(a) E. l. 1. p. 32.

(b) E. l. 1. p. 6.

Sixièmement enfin, les lignes CG & CF traversent le cercle IFGKP, & sont tirées d'un même point C hors de ce cercle à sa circonférence [D. 5.]. Ainsi, le rectangle fait de CK & de CG est égal au rectangle fait de CF & de CP (c); & par conséquent, puisque CK est égal à BI [D. 1.], & que CP l'est à BF [D. 5.], le rectangle fait de BI & de CG, est égal au rectangle fait de CF & de BF. Or, CF est la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC, & BF est la différence du côté AC à cette même demie somme. Car, puisque les côtés AB, AC & BC de ce triangle sont des tangentes au cercle DEF, les lignes BF & BD sont égales, de même que les lignes AE & AD, & les lignes CF & CE (d); & par conséquent, les lignes BF & AE prises ensemble, sont égales au côté AB: les lignes AE & CF prises ensemble, au côté AC: & les lignes BF, AE & CF prises ensemble, à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC. Donc C. Q. F. D.

(c) E. l. 3. p. 36.

(d) E. l. 3. p. 36.

CHAPITRE II.

Des Problêmes de la Trigonométrie-rectiligne.

117. LES parties inconnues dans un triangle ne peuvent se conclure des parties connues, que dans les cas ausquels ces parties connues ne laissent aucune *ambiguité*; c'est-à-dire, sont suffisantes pour faire connoître que le triangle dont il s'agit ne peut être que tel triangle, & où l'on peut par conséquent en construire un qui lui soit entiérement égal. Or, on ne peut être certain de l'égalité entiére de deux triangles rectilignes quelconques, que de l'une des quatre maniére suivantes, sçavoir. Premiérement, lorsque l'on connoît que *l'un des angles du premier & l'un des angles du second sont égaux; & que les côtés qui forment cet angle du premier & ceux qui forment cet angle du second le sont aussi, chacun à chacun* (*a*). Secondement, lorsque l'on sçait que *l'un des angles du premier est égal à l'un des angles du second; & que deux des côtés du premier & deux des côtés du second sont égaux, chacun à chacun, & opposés à des angles de même espece* (*b*). Troisiémement, lorsque l'on sçait que *l'un des côtés du premier est égal à l'un des côtés du second; & que deux des angles du premier semblablement posés à deux des angles du second, sont égaux à ces deux angles du second, chacun à chacun* (*c*). Quatriémement

(*a*) E. l. 1. p. 4.

(*b*) E. l. 6. p. 7.

(*c*) E. l. 1. p. 26.

enfin, lorsque l'on connoît que *les côtés du premier sont égaux à ceux du second, chacun à chacun* (a). Ainsi, l'on ne peut construire un triangle rectiligne qui soit entiérement égal à un autre, que lorsqu'on connoît dans cet autre un *angle avec les côtés qui forment cet angle*: ou *un angle & deux côtés quelconques, avec l'espece des autres angles*: ou *un côté avec deux angles*: ou enfin, *les trois côtés*. Par conséquent, il faut toujours connoître *trois* des *six* parties que l'on peut considérer dans un triangle rectiligne quelconque, pour pouvoir trouver chacune des *trois* autres. Mais de ces *trois* parties connues, *deux seulement sont de suite*: ou *toutes le sont*: ou enfin *toutes sont séparées les unes des autres*. Donc, on peut réduire tous les problêmes de la Trigonométrie-rectiligne aux trois suivans, qui dépendent, l'un de la premiére proposition du chapitre précedent (b); l'autre, de la seconde (c); & le dernier, de la troisiéme (d).

(a) E. l. 1. p. 8.
(b) N. 112.
(c) N. 114.
(d) N. 116.

PROBLESME I.

118. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-rectiligne quelconque, dont il n'y a que deux des parties connues qui soient de suite.*

Lorsque deux seulement des trois parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont de suite, ces parties connues ne peuvent être que *deux angles & un côté*; & l'on cherche *les autres côtés*: (car l'*autre angle* est alors connu, puisque (e) les trois angles d'un trian-

(e) E. l. 1. p. 32.

gle-rectiligne quelconque, pris ensemble, valent toujours 180 degrés :) ou *deux côtés*, *& un angle opposé à l'un de ces côtés*; & l'on cherche ou *les autres angles*, ou *l'autre côté*. Ainsi ce problême a trois cas.

Premier Cas.

119. *Connoissant dans un triangle-rectiligne quelconque, deux angles & un côté, trouver les autres côtés.*

*Fig. 19. On donne dans le triangle ABC *, l'angle A de 50 *d.* 15 *m.* l'angle B de 67 *d.* 32 *m.* avec le côté AC de 752½ toises; & il faut trouver les autres côtés AB & BC †.

Solution. 1^ent. *Le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle C, comme le côté AC est au côté AB* (*a*).

(*a*) N. 112.

Ainsi, l'on trouvera de la maniére suivante, le côté AB (*b*).

(*b*) N. 107.

Complément du logarithme du sinus de l'angle B donné de 67 d. 32 m. - - - - - - - - -	0.0342801
Log. du sinus de l'angle C trouvé § *de 62 d. 13 m.*	9.9468042
Logarithme du côté AC donné de 752½ T. - -	2.8765065
Logarithme du côté demandé AB - - - -	12.8575908

(*c*) N. 100. qui (*c*) donnera 720 $\frac{287}{979}$ toises, ou 720 toises 2 pieds 7 pouces *p. m.* pour la valeur de ce côté.

† Dans les figures, on marque par une petite ligne les partie connues; & par un petit cercle, la partie que l'on cherche.

§ On trouve la valeur de l'angle C (*d*), en retranchant de 180 degrés la somme 117 deg. 47 min. des angles A & B qui sont donnés.

(*d*) E. l. 1. p. 32.

2^ent^. *Le sinus de l'angle* B *est au sinus de l'angle* A, *comme le côté* AC *est au côté* BC (*a*). (a) N. 112.

Ainsi, l'on trouvera de la maniére suivante, le côté BC (*b*). (b) N. 107.

Complément du logarithme du sinus de l'angle B *donné de* 67 *d.* 32 *m.* - - - - - - - - - -	0.0342801
Logarithme du sinus de l'angle A *donné de* 50 *d.* 15 *m.* - - - - - - - - - -	9.8858370
Logarithme du côté AC *donné de* $752\frac{1}{2}$ *T.* - -	2.8765065
Logarithme du côté demandé BC - - - -	12.7966236

qui (*c*) donnera $626\frac{493}{6940}$ toises, ou 626 toises 0 pieds 5 pouces 7. p. pour la valeur de ce côté. (c) N. 100.

SCHOLIE I.

120. *Si au lieu de donner dans le triangle* ABC *, *les angles* A & B, *on donnoit les angles* A & C; *il n'y auroit de même dans ce triangle que deux des parties connues qui seroient de suite. Car on ne doit compter dans un problême pour parties connues, que celles qui contribuent immédiatement à faire trouver la partie inconnue. Or, dans le triangle* ABC, *l'angle* A *ne contribue point immédiatement à faire connoître le côté* AB; *ni l'angle* C *à faire connoître le côté* BC. *Ainsi, lorsqu'il s'agit de trouver le côté* AB, *on ne doit compter pour parties connues que les angles* B & C, *avec le côté* AC : *de même que lorsqu'il s'agit de trouver le côté* BC, *on ne doit compter que les angles* A & B, *avec le même côté* AC. *Par conséquent, soit que l'on donne dans un triangle rectiligne quelconque* ABC, *les angles* A & B, *avec le côté* AC; *soit que l'on y donne les angles* A & C, *avec le même côté* AC, * Fig. 19.

il n'y aura toujours dans ce triangle, que deux des parties connues qui seront de suite.

SCHOLIE II.

* Fig. 20. 121. *Si le triangle* ABC * *est rectangle, cela ne change rien à la régle précédente, puisque l'on a pareillement ces deux proportions :* le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle C, comme le côté AC est au côté AB : & le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A, comme le côté AC est au côté BC (*a*).

(a) N. 112.

Ainsi, si dans le premier triangle qui est rectangle en B, *on donne l'angle* A *de* 51 *deg.* 40 *m. avec le côté* AC *de* 943 *toises ;* Premiérement, *on trouvera de la maniére suivante, le côté* AB(*b*).

(b) N. 105.

Logarithme du sinus du complément † de l'angle A donné de 51 d. 40 m. - - - - -	9.7925566
Logarithme du côté AC donné de 943 T. -	2.9745117
Logarithme du côté demandé AB - - - -	12.7670683

(c) N. 100. *qui* (*c*) *donnera* $584\frac{127}{213}$ *toises, ou* 584 *toises* 5 *pieds* 3 *pouces* $\frac{1}{2}$ p. p. *pour la valeur de ce côté.*

Secondement, *on trouvera de la maniére suivante, le côté* BC (*d*).

(d) N. 105.

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 51 d. 40 m. - - - - - - - - - - - - - -	9.8945463
Logarithme du côté AC donné de 943 T. -	2.9745117
Logarithme du côté demandé BC - - - -	12.8690580

(e) N. 100. *qui* (*e*) *donnera* $739\frac{4133}{5870}$ *toises, ou* 739 *toises* 4 *pieds* 2 *pouces* $\frac{2}{3}$ p. p. *pour la valeur de ce côté.*

(f) E. l. 1. p. 32.

(g) N. 21.

† Comme dans un triangle rectangle, les angles aigus sont réciproquement complément l'un de l'autre (*f*), de même que les arcs qui se correspondent sur les *recto* & les *verso* des feuillets des Tables (*g*), on trouve dans les Tables la valeur de l'angle C, en y cherchant celle de l'angle donné A.

122. *Et si dans le second triangle qui est rectangle en* C*, *on donne l'angle* A *de* 50 *d.* 43 *m. avec le côté* AC *de* 638 *toises*; Premiérement, *on trouvera de la maniére suivante, le côté* AB (*a*). *Fig. 20. (a) N. 110.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 50 d. 43 m. -	0.1984894
Logarithme du côté AC donné de 638 *T.*	2.8048207
Logarithme du côté demandé AB - - -	3.0033101

qui (*b*) *donnera* $1007\frac{1403}{2155}$ *toises, ou* 1007 *toises* 3 *pieds* 11 *pouces* p. m. *pour la valeur de ce côté.* (b) N. 98.

Secondement, *on trouvera de la maniére suivante, le côté* BC (*c*). (c) N. 107.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 50 d. 43 m. - -	0.1984894
Logarithme du sinus du même angle A - -	9.8887547
Logarithme du côté AC donné de 638 *T.*	2.8048207
Logarithme du côté demandé BC - - -	12.8920648

qui (*d*) *donnera* $779\frac{2636}{2785}$ *toises, ou* 779 *toises* 5 *pieds* 8 *pouces* p. p. *pour la valeur de ce côté.* (d) N. 100.

123. *Cependant, lorsque le côté donné* AC * *est adjacent à l'angle droit* C, *comme dans le second triangle, on peut se servir de la Table des tangentes, pour trouver l'autre côté* BC *adjacent au même angle; puisque, suivant ce qui a été dit dans le premier chapitre de la seconde section du livre précedent* (*e*), *le sinus total est à la tangente de l'angle* A, *comme le côté* AC *est au côté* BC. *Fig. 20. (e) N. 33.

Ainsi, l'on pourra trouver ce côté BC, *de la*
(a) N. 105. *manière suivante (a) qui est la plus courte.*

Logarithme de la tangente de l'angle A donné de 50 d. 43 m. - - - - - - - - - - -	10.0872441
Logarithme du côté AC donné de 638 *T.*	2.8048207
Logarithme du côté demandé BC - - -	12.8920648

(b) N. 122. *qui est le même que celui de la règle précédente* (b), *& donne par conséquent le même nombre* $779\frac{2636}{2765}$ *pour la valeur de ce côté.*

SCHOLIE III.

124. *Enfin, on peut trouver les quatrièmes termes des proportions précédentes, & généralement de toutes celles que l'on propose dans ce Traité, en multipliant leur second terme par leur troisiéme terme; & en divisant ensuite le produit, par leur premier terme, suivant l'usage ordinaire.*

Ainsi, l'on peut, par exemple, trouver le quatriéme terme 720 *toises* 2 *pieds* 7 *pouces* p. m. *de la première proportion du* N° 119, *en multipliant le sinus* 88471.66 *de l'angle* C *,
* Fig. 19. *par le côté* AC *qui est donné de* $752\frac{1}{2}$ *toises; & en divisant ensuite le produit* 6657492415, *par le sinus* 92410.20 *de l'angle* B.

*Mais, c'est toujours le plus court de se servir des logarithmes, & de prendre le complément de celui du premier terme, conformément à ce que nous avons dit au chapitre cinquième de la der-
(c) N. 104. nière section du livre précedent* (c).

Second Cas.

125. *Connoissant dans un triangle rectiligne quelconque, deux côtés avec un angle opposé à l'un*

un de ces côtés, trouver les autres angles.

On donne dans le triangle ABC *, le côté AB de 572 toises, le côté BC de 837 toises, avec l'angle C de 38 *deg.* 47 *min.* & il faut trouver les autres angles A & B. * Fig. 21.

Solution. *Le côté* AB *est au côté* BC, *comme le sinus de l'angle* C *est au sinus de l'angle* A (*a*). (*a*) N. 111.

Ainsi, l'on trouvera de la maniére suivante (*b*), le logarithme du sinus de ce dernier angle. (*b*) N. 107.

Complément du logarithme du côté AB *donné de* 572 *T.* - - - - - - - - - - - - -	7.2426640
Logarithme du côté BC *donné de* 837 *T.* - -	2.9227254
Logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 38 *d.* 47 *m.* - - - - - - - - - - - -	9.7968359
Logarithme du sinus de l'angle demandé A -	19.9621653

qui (*c*) donnera 66 *deg.* 25 *m.* 48 *s. p. p.* pour la valeur de cet angle, ou pour celle de son supplément. Mais comme les parties connues dans le triangle proposé, ne déterminent point auquel des deux cette valeur appartient, puisque ces parties conviennent également & au premier triangle qui est acutangle, & au second qui est obtusangle, la résolution de ce second cas n'est possible, que lorsqu'on connoît l'espéce de l'angle qu'il faut trouver. (*c*) N. 103.

126. OR, lorsque l'on aura trouvé l'angle A, on connoîtra l'angle B (*d*), en retranchant la somme des angles A & C de celle de deux angles droits; c'est-à-dire, de 180 degrés. (*d*) E. l. 1. p. 32.

Ainsi, cet angle B sera de 74 *deg.* 47 *min.* 14 *sec. p. m.* dans le premier triangle; & de 27 *deg.* 38 *min.* 46 *sec. p. p.* dans le second.

SCHOLIE.

* Fig. 22. 127. *Si le triangle* ABC * *est rectangle, on a pareillement cette proportion :* le côté AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est (a) N. 112. au sinus de l'angle A (*a*).

Ainsi, si l'on donne l'hypoténuse AB *de* 837 *toises, avec le côté* BC *de* 694 *toises, on trou-* (b) N. 110. *vera de la manière suivante* (*b*), *l'angle* A.

Complément du logarithme du côté AB donné de 837 *T.* - - - - - - - - - - - - - -	7.0772746
Logarithme du côté BC donné de 694 *T.* -	2.8413595
Logarithme du sinus de l'angle demandé A -	9.9186341

(c) N. 103. *qui* (*c*) *donnera* 56 *deg.* 0 *m.* 42 *s.* p. p. *pour la valeur de cet angle ; & par conséquent* 33 *d.* 59 *m.* 18 *s.* p. m. *pour celle* (d) N. 121† *de l'angle* B (*d*).

Or, dans ce cas il n'y aura point d'ambiguité, puisque l'angle C *étant droit* [H], *les autres an-* (e) E. 1. p. 17. *gles* A *&* B *seront nécessairement aigus* (*e*).

Troisiéme Cas.

128. *Connoissant dans un triangle-rectiligne quelconque, deux côtés avec un angle opposé à l'un de ces côtés, trouver l'autre côté.*

* Fig. 23. On donne dans le triangle ABC *, le côté AB de 490 toises, le côté BC de 728 toises, avec l'angle C de 36 *deg.* 29 *min.* & il faut trouver l'autre côté AC.

Solution. Cherchez (*a*) la valeur de l'angle A †. (*a*) N. 125.
Cherchez (*b*) ensuite celle de l'angle B. Enfin, (*b*) N. 126.
cherchez (*c*) le côté demandé AC. (*c*) N. 129.

1er (*d*)

Complément du logarithme du côté AB *donné de* 490 *T.* - - - - - - -	7.3098039
Logarithme du côté BC *donné de* 728 *T.* -	2.8621314
Log. du sin. de l'angle C *donné de* 36 *d.* 29 *m.*	9.7742168
Logar. du sinus de l'angle cherché A - -	19.9461521

(*d*) N. 107.

qui (*e*) donnera 62 *d.* 3 *m.* 14 *s.* pour la valeur de cet angle, (*e*) N. 103.
dans le premier triangle, où il est aigu.

2e (*f*)

Valeur trouvée de l'angle A - - -	62 *d.*	3 *m.*	14 *s.*
Valeur donnée de l'angle C - -	36	29	0
Valeur de deux angles droits -	180	0	0
Somme des angles A & C - -	98	32	14
Valeur de l'angle B - - - - -	81	27	46

(*f*) N. 126.

3e (*g*)

Complément du logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 36 *d.* 29 *m.* - -	0.2257832
Logarithme du sinus de l'angle B *trouvé de* 81 *d.* 27 *m.* 46 *s.* § - - -	9.9951610
Logarithme du côté AB *donné de* 490 *T.*	2.6901961
Logarithme du côté demandé AC - -	12.9111403

(*g*) N. 107.

qui (*h*) donnera $814\frac{5157}{5330}$ toises, ou 814 toises 5 pieds 9 pou- (*h*) N. 100.
ces $\frac{2}{3}$, *p. m.* pour la valeur de ce côté, dans le premier triangle.

129. MAIS, s'il s'agit du côté AC * du * Fig. 23.
second triangle, dans lequel l'angle A est obtus;
alors le même log. précedent 9.9461521 [S. I.],

† Puisque ce troisiéme cas dépend du second, sa résolution n'est possible, que lorsque celle du second l'est aussi (*i*). (*i*) N. 125.
§ Voyez le N. 92.

(a) N. 6. donnera (a) 117 *deg.* 56 *m.* 46 *s.* pour la valeur de cet angle. Ainsi :

	Valeur trouvée de l'angle A - -	117 *d.*	56 *m.*	46 *s.*
	Valeur donnée de l'angle C - -	36	29	0
(b) N. 126. 2ent (b)	*Valeur de deux angles droits* - -	180	0	0
	Somme des angles A & C - - -	154	25	46
	Valeur de l'angle B - - - - - -	25	34	14

	Complément du logarithme du sinus du supplément de l'angle A † *trouvé de* 117 *d.* 56 *m.* 46 *s.* - - - -	0.0538479
3ent	*Logarithme du sinus de l'angle* B *trouvé de* 25 *d.* 34 *m.* 14 *s.* - - -	9.6351038
(c) N. 107. (c)	*Logarithme du côté* BC *donné de* 728 *T.*	2.8621314
	Logarithme du côté demandé AC - -	12.5510831

(d) N. 100. qui (d) donnera $355 \frac{8539}{12210}$ toises, ou 355 toises 4 pieds 2 pouces $\frac{1}{4}$ *p. p.* pour la valeur de ce côté, dans le second triangle.

SCHOLIE I.

* Fig. 24. 130. *Si le triangle* ABC * *est rectangle, cela ne change rien à la maniére dont on vient de dire qu'il faut s'y prendre pour trouver le troisiéme côté* AC.

Ainsi, si l'on donne l'hypoténuse AB *de* 837 *toises, avec le côté* BC *de* 694 *toises, on* (e) N. 127. *cherchera l'angle* B (*e*); *& l'on trouvera en-*

† On peut prendre l'angle C & le côté AB pour chercher le côté AC, de même qu'on l'a fait dans la proportion précédente (*f*). (f) N. 128. Mais nous nous sommes servis de l'angle obtus A, afin de donner des exemples de tous les cas qui peuvent se rencontrer. A l'égard des log. des sinus des angles A & B, voyez les Nos 27 & 92.

faite de la manière suivante, le côté AC. (*a*). (a) N. 105.

Logar. du sinus de l'angle B trouvé de 33 *d.* 59 *m.* 18 *f.* (*b*) - - - - - - - - - - 9.7474305 (b) N. 92.
Logar. du côté AB donné de 837 *T.* - - - 2.9227254

Logarithme du côté demandé AC - - - 12.6701559

qui (*c*) *donnera* $467\frac{819}{929}$ *Toises, ou* 467 *Tois.* 5 *pieds*, 5 *pouces*, p. p. (c) N. 100.
pour la valeur de ce côté.

Mais on peut aussi trouver ce même côté, par le théorême suivant.

Théorême.

131. Dans un triangle rectangle, le quarré fait sur l'un quelconque des petits côtés, est égal au rectangle fait de la somme de l'autre petit côté & de l'hypoténuse, & de la différence de cet autre petit côté à cette même hypoténuse.

Dans le triangle ABC *, *le quarré du côté* BC *est égal au rectangle fait de la somme de l'autre côté* AC *& de l'hypoténuse* AB, *& de la différence de cet autre côté* AC *à cette même hypoténuse* AB. * Fig. 24.

Constr. *Du point* A *pris pour centre, & avec le côté* AC *pris pour rayon, décrivez un cercle* CDE. *Prolongez ensuite l'hypoténuse* AB *vers* D, *jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point* D, *la circonférence de ce cercle.*

Démonstr. *Le côté* BC *est tangent au cercle* CDE (*d*), *puisque l'angle* C *est droit* [H]. *Ainsi, le quarré de ce côté est égal* (e) *au rectangle fait de la sécante* BD *& de sa partie* BE. (d) E. l. 3. p. 16. (e) E. l. 6. p. 36.

Or, la sécante BD *est la somme du côté* AC *&* *de l'hypoténuse* AB ; *puisque les lignes* AD *&* AC *qui* [c] *sont rayons du même cercle* CDE, *sont égales : & la partie* BE *est la différence du même côté* AC *à la même hypoténuse* AB, *puisque les lignes* AE *&* AC *qui sont aussi rayons du même cercle* CDE [c] , *sont aussi égales. Donc, le quarré du côté* BC *est égal au rectangle fait de &c. & par conséquent* C. Q. F. D.

132. *Ainsi, si l'on suppose un cercle décrit*
* Fig. 24. *du point* B * *pris pour centre, & avec le côté* BC *pris pour rayon, on pourra trouver de la manière suivante, qui est la plus courte, le même côté* AC.

1^{ent}	Valeur donnée du côté AB - - - - - -	837 *T.*
	Valeur donnée du coté BC - - - - - -	694
	Somme de ces deux côtés - - - - - -	1531
	Différence de ces deux mêmes côtés - -	143

		Logarithme de la différence des côtés AB & BC, trouvée de 143 *T.* - - - -	2.1553360
		Logarithme de la somme de ces mêmes côtés, trouvée de 1531 *T.* - - -	3.1849752
(*a*) N. 53.	2^{ent}	Somme de ces deux logarithmes, ou (*a*) log. du quarré du côté demandé AC - -	5.3403112
(*b*) N. 61.		Moitié de cette somme, ou (*b*) logarithme de ce côté - - - - - - - -	2.6701556

qui est le même † *que l'on a trouvé au N°* 130 ; *& qui donne par conséquent le même nombre* $467\frac{859}{929}$ *pour la valeur de ce côté.*

† Ce logarithme est plus petit de 3 unités que celui que l'on a trouvé pour ce même côté AC au N° 130 ; parce que l'an-
(*c*) N. 127. gle A étant (*c*) d'un peu plus de 56 *deg.* 0 *min.* 42 *s.* l'angle B qui a servi à trouver ce côté AC, devoit être d'un peu moins de 33 *deg.* 59 *min.* 18 *s.* Mais ces différences sont absolument insensibles.

SCHOLIE II.

133. *Enfin, lorsque dans quelque triangle rectangle que ce puisse être, on connoît deux côtés quelconques, on peut toujours trouver le troisiéme, par la 47[e] proposition du premier livre d'Euclide.*

Ainsi, l'on auroit encore pû connoître de la maniére suivante, le même côté AC. * * Fig. 24.

Valeur donnée du côté AB - - - - - - - - -	837
- - - - - - -	5859
- - - - - - -	2511
- - - - - - -	6696
Quarré de ce côté - - - - - - - - - -	700569
Valeur donnée du côté BC - - -	694
- - - - - - - -	2776
- - - - - -	6246
- - - - - -	4164
Quarré de ce côté - - - - - - - - - - - - -	481636

Différence de ces deux quarrés, ou quarré du côté AC. - - -		8		
	8	73	44	Dont la racine 467[?].
	21	89	33	p. p. est la valeur de
		86	27	ce côté.
		9		

Mais, lorsqu'il s'agit d'un triangle un peu grand, & dont l'hypoténuse est un des côtés connus, le plus court est de se servir du théorême de la scholie précedente (a). (a) N. 131.

134. *On peut remarquer que toutes les règles de proportion que l'on vient de faire dans ce problême, ont chacune pour premier terme, celle des parties connues qui est opposée à l'une des autres parties connues.*

Problême II.

135. *Trouver les parties inconnues d'un triangle rectiligne quelconque, dont toutes les parties connues sont de suite.*

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont de suite, ces parties ne peuvent être qu'*un angle & les côtés qui forment cet angle ;* puisque si elles étoient *un côté & les angles adjacents à ce*
(a) N. 120. *côté*, il n'y en auroit (*a*) que deux qui seroient de suite. Ainsi, l'on ne peut chercher que *les autres angles*, ou *l'autre côté ;* & par conséquent ce Problême n'a que deux cas.

Premier Cas.

136. *Connoissant dans un triangle rectiligne quelconque, un angle avec les côtés qui forment cet angle, trouver les autres angles.*

*Fig 25. On donne dans le triangle ABC *, l'angle A de 39 *deg.* 37 *m.* le côté AB de 476$\frac{1}{2}$ toises, avec le côté AC de 234 toises ; & il faut trouver les autres angles B & C.

Solution. *La somme des côtés* AB *&* AC *est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles* C *&* B, *est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes*
(b) N. 114. *angles* (*b*).

Ainsi

Ainsi, l'on trouvera de la maniére suivante, la moitié de cette différence.

1.er	*Valeur donnée du côté AB* - - - - - -	476½ T.			
	Valeur donnée du côté AC - - - - -	234			
	Somme de ces deux côtés - - - - - -	710½			
	Différence de ces deux mêmes côtés - - -	242½			
2.e	*Valeur de deux angles droits* - -	180 d.	0 m.	0 s.	
	Valeur donnée de l'angle A - -	39	37	0	
	Somme (a) des angles C & B - - -	140	23	0	(a) E. I. 11
	Moitié de cette somme - - - -	70	11	30	p. 32.
3.e (b)	*Complément du logarithme de la somme des côtés AB & AC, trouvée de 710½ T.* -	7.1484359			
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 242½ T. - - - -	2.3847117			
	Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles C & B, trouvée de 70 deg. 11 m. 30 s. - - - -	10.4434726			(b) N. 107.
	Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée - - - - -	19.9766202			

qui (c) donnera 43 d. 27 m. 30 s. *p. p.* pour la valeur de cette moitié. (c) N. 103.

137. Mais, *de deux quantités quelconques, la plus grande est toujours la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence; & la plus petite au contraire, est toujours la moitié de cette même somme, moins la moitié de cette même différence* †. Donc, puisque l'on connoît la demi-somme 70 *d.* 11 *m.* 30 *s.* des deux angles de-

† Si l'on divise en deux également en un point D *, la somme ABC de deux quantités quelconques; que nous représentons par les lignes droites AB & BC, les lignes AD & DC représenteront chacune la moitié de cette somme. Et si sur la ligne AB qui represente la plus grande de ces deux quantités, on prend la partie AE égale à la plus petite qui est représentée par la ligne BC, le reste EB sera aussi divisé en deux également au même point D; puisque [c] les lignes AE & BC seront égales, de même que * Fig. 16.

R

mandés B & C, avec leur demi-différence que l'on vient de trouver de 43 *d.* 27 *m.* 30 *ſ.* ſi l'on ajoûte à cette demi-ſomme cette demi-différence, on aura 113 *deg.* 39 *m.* pour la valeur du plus grand de ces deux angles; (c'eſt-à-dire, de l'angle C (*a*), puiſque c'eſt lui qui eſt oppoſé au plus grand des deux côtés connus) : & ſi l'on retranche au contraire de cette même demi-ſomme, cette même demi-différence, le reſte 26 *deg.* 44 *m.* ſera la valeur du plus petit de ces deux mêmes angles, c'eſt-à-dire, de l'angle B.

(a) E. l. 1. p 18.

SCHOLIE.

138. *Si le triangle* ABC * *eſt rectangle, cela ne change rien à la régle précédente, puiſque l'on a pareillement cette proportion :* la ſomme des côtés AC & CB eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles B & A, eſt à la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles (*b*).

* Fig. 27.

(b) N. 114.

Ainſi, ſi l'on donne le côté AC *de* 248 *toiſes, & le côté* BC *de* 417 ; *on trouvera de la maniére ſuivante, la moitié de la différence des angles* B *&* A.

1ent	Valeur donnée du côté CB - - - -	417 *T.*
	Valeur donnée du côté AC - - - - - -	248
	Somme de ces deux côtés - - - - - -	665
	Différence de ces deux mêmes côtés - - -	169

les lignes AD & DC le ſont [c]. Par conſéquent, la ligne DB repréſentera la moitié de la différence de ces deux mêmes quantités. Or, la ligne AB eſt la même choſe que la ligne AD, plus la ligne DB; & la ligne BC eſt la même choſe que la ligne DC, moins la ligne DB. Donc, *ſi deux quantités*, &c.

Complément du logarithme de la somme des côtés AC & CB, trouvée de 665 *T.*	7.1771784	
Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 169 *T.* - - - -	2.2278867	
Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles A & B, trouvée de 45 d. †. - - - - - - - - -	———	(a) N. 107.
Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée - - - - -	9.4050651	

qui (b) donnera 14 deg. 15 min. 32 ſ. p. p. *pour la valeur de cette moitié ; & par conséquent on trouvera (c) que l'angle demandé* A *eſt de 59 deg. 15 m. 32 ſ.* p. p. *& que l'autre angle demandé* B *eſt de 30 deg. 44 min. 28 ſ.* p. m. (b) N. 103. (c) N. 137.

139. *Mais, ſuivant ce qui a été dit au* N° 33 : le côté AC * eſt au côté BC, comme le ſinus total eſt à la tangente de l'angle A : & le côté BC eſt au côté CA, comme le ſinus total eſt à la tangente de l'angle B. * Fig. 27.

Ainſi, l'on pourra auſſi trouver de la maniére ſuivante (d) qui eſt la plus courte, celui de ces deux angles que l'on voudra ; par exemple, l'angle B. (d) N. 110.

Complément du logarithme du côté BC donné de 417 *T.* - - - - - - - - - - - - - -	7.3798640
Logarithme du côté CA donné de 248 *T.* -	2.3944517
Logarithme de la tangente de l'angle demandé B	9.7743157

qui (e) donnera de même que la régle précédente (f) 30 d. 44 min. 28 ſ. p. m. *pour la valeur de cet angle ; & par conſéquent 59 d. 15 min 32 ſ.* p. p. *pour celle de l'angle* A. (e) N. 103. (f) N. 138.

Second Cas.

140. *Connoiſſant dans un triangle-rectiligne quelconque, un angle avec les côtés qui forment cet angle, trouver l'autre côté.*

† Comme la tangente d'un angle de 45 deg. eſt égale au ſinus total, on la ſupprime dans tous les cas auſquels on peut ſupprimer ce ſinus (g). (g) N. 110.

* Fig. 28. On donne dans le triangle ABC *, l'angle A de 49 *deg.* 23 *min.* le côté AB de 371 toises, avec le côté AC de 532 toises; & il faut trouver l'autre côté BC.

(a) N. 136. (b) N. 119. *Solution.* Cherchez (*a*) l'un ou l'autre des angles B & C; & vous trouverez ensuite (*b*) le côté demandé BC. Ainsi :

1ent	*Valeur donnée du côté* AC - - -	532 T
	Valeur donnée du côté AB - - - - -	371
	Somme de ces deux côtés - - -	903
	Différence de ces deux mêmes côtés - - -	161

2ent	*Valeur de deux angles droits* - -	180 *d.*	0 *m.*	0 *f.*
	Valeur donnée de l'angle A - -	49	23	0
(c) E. l. 1. p. 32.	*Somme* (*c*) *des angles* B & C - -	130	37	0
	Moitié de cette somme - - - -	65	18	30

3ent	*Complément du logarithme de la somme des côtés* AB & AC, *trouvée de* 903 *T.*	7.0443123
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 161 *T.* - - - -	2.2068259
(d) N. 107. (d)	*Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles* B & C *trouvée de* 65 *d.* 18 *m.* 30 *f.* - - - - -	10.3374571
	Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée - - - - -	19.5885953

(e) N. 103. qui (*e*) donnera 21 deg. 11 min. 44 $\frac{2}{3}$ sec. *p. p.* pour la valeur de cette moitié; & par conséquent (*f*) 86 deg. 30 min. 14 $\frac{2}{3}$ sec. *p. p.* pour la valeur de l'angle B, & 44 deg. 6 min. 45 $\frac{1}{3}$ sec. *p. m.* pour celle de l'angle C.
(f) N. 137.

4ent	*Complément du logarithme du sinus de l'angle* B *trouvé de* 86 *d.* 30 *m.* 14 $\frac{2}{3}$ *f.*	0.0008089
	Logarithme du sinus de l'angle A *donné de* 49 *d.* 23 *m.*	9.8802887
(g) N. 107. (g)	*Logarithme du côté* AC *donné de* 532 *T.* -	2.7259116
	Logarithme du côté demandé BC - - -	12.6070092

(h) N. 100. qui (*h*) donnera 404 $\frac{6277}{10742}$ toises, ou 404 toises 3 pieds 6 pouces *p. p.* pour la valeur de ce côté.

SCHOLIE I.

141. *Si le triangle dont il s'agit est rectangle, cela ne change rien à la maniére dont on vient de dire qu'il faut s'y prendre pour trouver le côté demandé. Mais on peut aussi alors le trouver par la seconde scholie du troisiéme cas du premier problême (a); quoique le plus court, lorsqu'il s'agit de nombres un peu considérables, soit de le chercher de la maniére dont on vient de le faire.*

(a) N. 133.

SCHOLIE II.

142. *On peut aussi résoudre ce second cas par la derniére proposition du chapitre précedent (b); puisque suivant ce qui a été démontré dans cette proposition;* le quarré du sinus total est au quarré du sinus de la moitié de l'angle A*, comme le rectangle fait des côtés AB & AC est au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC, & de la différence du côté AC à cette même moitié. *Ainsi :*

(b) N. 116.

* Fig. 28.

1^ent	Valeur donnée du côté AC - - - -	532 T.
	Valeur donnée du côté AB - - - -	371
	Somme de ces deux côtés - - - - -	903
	Différence de ces deux mêmes côtés -	161
	Moitié de cette différence - - - -	$80\frac{1}{2}$
	Quarré de cette moitié - - - - -	$6480\frac{1}{4}$

2^ent	Valeur donnée de l'angle A - - -	49 d.	23 m.	0 f.
	Valeur de la moitié de cet angle	24	41	30

(a) N. 60. Double (a) du logarithme du sinus de la moitié de l'angle A, trouvée de 24 d. 41 m. 30 f. - - - - - 19.2418016

Logarithme du côté AB donné de 371 T. 2.5693739

3 ent (b) Logarithme du côté AC donné de 532 T. 2.7259116

(b) N. 109. Logarithme du rectangle fait des différences des côtés AB & AC à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC - - - - - 24.5370871

(c) N. 99. *qui (c) donnera* $34441\frac{1139}{1261}$ *toises quarrées pour la valeur de ce rectangle.*

Or, la différence des côtés de ce même rectangle est connue, puisque ces côtés étant chacun (d) *ce qui reste de la moitié de la somme des trois côtés du triangle* ABC, *après en avoir retranché chaque côté* AB & AC, *leur différence doit être la même que celle de ces derniers côtés. Donc* (e).

(d) N. 116.

(e) E l. 2. p. 5.

Rectangle fait des différences des côtés AB & AC à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC., trouvé de - - - - - -	$34441\frac{1139}{1261}$ T.
Quarré de la moitié de la différence des côtés de ce rectangle, trouvée de $80\frac{1}{2}$ T. - - - -	$6480\frac{1}{4}$
Quarré de la moitié d'une ligne composée de ces derniers côtés - - - - - - - - - -	$40922.\frac{773}{5044}$
Racine seconde de ce quarré, ou valeur de cette moitié - - - - - - - - - - - - -	$202\frac{737}{1522}$
Moitié de la différence de ces mêmes côtés - - -	$80\frac{1}{2}$
Grand côté du rectangle, ou différence du plus petit côté donné AB du triangle ABC, à la moitié de la somme des trois côtés de ce triangle - - - - - - - - - - - - - - - -	$282\frac{989}{1261}$
Plus petit côté donné AB - - - - - -	371
Moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC - - - - - - - - - - - -	$653\frac{989}{1261}$

Somme de ces trois côtés - - - - - - -	$1307\frac{737}{1261}$
Somme des côtés donnés AB & AC - - - - -	903
Valeur du côté demandé BC - - - - - - - - -	$404\frac{737}{1261}$

ou 404 toises 3 pieds 6 pouces, *p. p.*

Mais cette maniére est extrêmement longue.

Problême III.

143. *Trouver les parties inconnues d'un triangle rectiligne quelconque, dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres.*

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont séparées les unes des autres, ces parties ne peuvent être que *les trois angles*; & l'on cherche *les rapports que les côtés ont entr'eux* †: ou *les trois côtés*; & l'on cherche *les angles*. Ainsi, ce Problême n'a que deux cas.

Premier Cas.

144. *Connoissant chaque angle d'un triangle-rectiligne quelconque, trouver les rapports que les côtés ont entr'eux.*

On donne dans le triangle ABC*, l'angle, A de 57 *deg.* 28 *m.* l'angle B de 79 *deg.* 57 *m.* avec l'angle C de 42 *deg.* 35 *m.* & il faut * Fig. 29.

† Comme l'égalité des angles détermine seulement les triangles-rectilignes à être semblables, & ne les nécessite point à être égaux; lorsque l'on ne connoîtra que chaque angle d'un triangle-rectiligne quelconque, on pourra bien trouver les rapports que les côtés de ce triangle auront entr'eux, puisque l'on pourra trouver la valeur de chaque côté d'un triangle qui lui sera équiangle (a), & qui donnera par conséquent ces rapports. Mais on ne pourra connoître la grandeur d'aucun de ses côtés, puisque l'on n'aura rien qui détermine cette grandeur. (a) N. 1.

trouver les rapports que les côtés AB, A[C] & BC ont entr'eux.

Solution. Cherchez dans la Table les si-nus des angles A, B & C; & ces sinus auront entr'eux (a) les rapports demandés.

(a) N. 112.

Ainsi AB : AC : : 6766618 : 9846558; AB : BC : : 6766618 : 8430787; & AC : BC : : 9846558 : 843 0787.

Second Cas.

145. *Connoissant chaque côté d'un triangle rectiligne quelconque, trouver les angles.*

* Fig. 30.

On donne dans le triangle ABC *, le côté AB de 504 toises, le côté AC de 1029 toises, avec le côté BC de 826 toises; & il faut trouver chacun des angles A, B & C.

Solution. *Le rectangle fait des côtés* AB *&* AC, *est au rectangle fait de la différence du côté* AB *à la moitié de la somme des trois côtés* AB, AC *&* BC, *& de la différence du côté* AC *à cette même moitié; comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de la moitié de l'angle* A (b).

(b) N. 116.

Ainsi, l'on trouvera cet angle, de la manière suivante.

1 ent.	*Valeur donnée du côté* AB	504 T.
	Valeur donnée du côté AC	1029
	Valeur donnée du côté BC	826
	Somme de ces trois côtés	2359
	Moitié de cette somme	1179 ½
	Différence du côté AB *à cette moitié*	675 ½
	Différence du côté AC *à cette même moitié*	150 ½

Complément

	Complément du logarithme du côté AB *donné de* 504 *T.* - - -	7.2975695 †
	Complément du Logarithme du côté AC *donné de* 1029 - - - - -	6.9875846
	Logarithme de la différence du côté AB, *trouvée de* 675½ *T.* - - - - - - -	2.8296253
2^em^	*Logarithme de la différence du côté* AC, *trouvée de* 150½ *T.* - - - - - - -	2.1775365
	Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé A - - - - -	19.2923159
	Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - -	9.6461579

qui (a) donnera 26 d. 16. m. 46 f. *p. m.* pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 52 d. 33 m. 32 f. pour celle de cet angle. (a) N. 103.

Lorsqu'on aura trouvé l'angle A, on cherchera de la maniére suivante (b), l'angle C ¶. (b) N. 119.

Complément du logarithme du côté BC *donné de* 226 *T.* - - - - - - - - - - - -	7.0830200
Logarithme du côté AB *donné de* 504 *T.* - -	2.7024305
Logarithme du sinus de l'angle A *trouvé de* 52 *d.* 33 *m.* 32 *f.* (c). - - - - - - -	9.8998087 (c) N. 92.
Logarithme du sinus de l'angle demandé C - -	19.6852592

qui (d) donnera 28 deg. 58 min. 38 f. *p. m.* pour la valeur de cet angle. (d) N. 103.

Enfin, lorsque l'on aura trouvé les angles A & C, on trouvera l'angle B de 98 *deg.* 27 *m.*

† La somme des compléments des logarithmes des côtés AB & AC au sinus total, est la même chose que le complément de la somme de ces deux mêmes logarithmes au double du logarithme du sinus total.

¶ Si lorsqu'il s'agit de trouver chaque angle d'un triangle-rectiligne, on n'a pas commencé par chercher celui qui est opposé au plus grand côté, il faut toujours ensuite chercher immédiatement celui qui est opposé au plus petit des deux côtés qui restent; afin d'éviter l'ambiguité dans laquelle on tomberoit, si l'on faisoit autrement, & qui disparoît par ce moyen; puisque si l'un des angles d'un triangle-rectiligne est obtus, ce ne peut être que celui qui est opposé au plus grand côté (e). (e) E. l. 1. p. 18. & 17.

50 *s.* en retranchant de 180 *deg.* la somme

(a) E. l. 1. p. 32. 81 *deg.* 32 *m.* 10 *s.* des angles A & C (*a*).

SCHOLIE I.

* Fig. 31. 146. *Si le triangle* ABC * *est isoscele, cela ne change rien à la régle précédente, puisque l'on a pareillement cette proportion;* le rectangle fait des côtés AB & AC est au rectangle fait

(b) N. 116. de la différence, &c. (*b*). *Mais il est alors plus court de supposer une perpendiculaire* BD *abbaissée du sommet de l'angle inégal* ABC *du triangle dont il s'agit, au côté opposé* AC; *parce que cette perpendiculaire divisant ce côté en deux*

(c) E. l. 6. p. 3. *parties égales* AD & DC (*c*), *on connoîtra dans chacun des triangles rectangles* ABD & CBD, *le côté qui sera opposé à l'angle droit* D, *avec celui qui sera la moitié de ce même côté* AC. *Ainsi, l'on pourra trouver par le N° 127, l'angle* ABD *ou l'angle* CBD; & *connoître par conséquent l'angle* ABC, *qui sera le double de l'un de ces angles;* & *les angles* A & C

(d) E. l. 1. p. 32. *qui* (*d*) *sont chacun la moitié de la différence de cet angle* ABC *à la somme de deux angles droits.*

Ainsi, si l'on donne les côtés AB & BC *chacun de* 707 *toises, avec le côté* AC *de* 648 *toises, on trouvera de la maniére suivante, chacun des angles* B, A & C.

Complément du logarithme du côté AB donné de 707 *T.* - - - - - - - - - - - - 7.1505806
Logarithme du côté AD trouvé de 324 *T.* 2.5105450

Logarithme de l'angle cherché ABD - - - - 9.6611256

(e) N. 103. *qui* (*e*) *donnera* 27 *deg.* 16 *min.* 33 *sec.* p. m. *pour la valeur de cet angle;* & *par conséquent* 54 *deg.* 33 *min.* 6 *sec. pour celle de l'angle demandé* B; & 62 *deg.* 43 *min.* 27 *sec. pour celle de chacun des autres angles demandés* A & C.

SCHOLIE II.

147. *On se sert ordinairement du théorême suivant, pour résoudre ce second cas.*

THEORESME.

148. Dans un triangle scalêne, le plus grand côté est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces deux autres côtés est à celle des *segments* † du premier.

Dans le triangle ABC*, *le plus grand côté* AC *est à la somme des deux autres côtés* AB *&* BC, *comme la différence de ces deux derniers côtés est à celle des segments du premier.* * Fig. 32.

Constr. *Du point* B, *abbaissez* (a) *une perpendiculaire* BD *au côté* AC. *Du même point* B *pris pour centre, & avec le plus petit des deux autres côtés, pris pour rayon, (c'est-à-dire, avec le côté* BC *) décrivez un cercle* FGCE. *Enfin, prolongez le côté* AB, *jusqu'à ce qu'il rencontre en un point* E, *la circonférence de ce cercle.* (a) E. I. 1. p. 12.

Démonstr. *Les lignes droites* AC *&* ABE *traversent le cercle* FGCE, *& sont tirées d'un même point* A *hors de ce cercle, à sa circonférence* [c]. *Ainsi, le rectangle fait de la sécante* AC *& de sa partie* AG, *est égal au rectangle fait de la sécante* ABE *& de sa partie* AF (b); *& par conséquent* (c) AC : ABE :: AF : AG. *Or* [H], AC *est le plus grand côté du triangle* ABC: (b) E. I. 3. p. 36. (c) E. I. 6. p. 16.

† Dans un triangle-rectiligne, on appelle *Segments* d'un côté quelconque AC *, les parties AD & DC, en lesquelles ce côté seroit divisé par une perpendiculaire BD qui lui seroit abbaissée du sommet de l'angle opposé B. * Fig. 32.

ABE *est la somme des autres côtés* AB *&* BC *de ce triangle ; puisque les lignes* BE *&* BC *qui sont* [c] *rayons du même cercle* FGCE, *sont égales :* AF *est la différence de ces deux autres côtés ; puisque les lignes* BF *&* BC *qui sont aussi* [c] *rayons du même cercle* FGCE, *sont aussi égales : enfin,* AG *est la différence des segments* AD *&* DC *du plus grand côté* AC *; puisque la perpendiculaire* BD *qui* [c] *est abbaissée du centre* B *du cercle* FGCE *à la corde* GC, *divise cette corde en deux parties égales* DG *&* DC (*a*). *Donc le plus grand côté* AC *est à la somme &c. & par conséquent* C. Q. F. D.

(*a*) E. 3. P. 3.

149. *Ainsi, si l'on veut se servir de ce théorême pour trouver chaque angle* A*, B *&* C *du triangle* ABC, *dont on donne le côté* AB *de* 826 *toises, le côté* BC *de* 504 *toises, & le côté* AC *de* 1029 *toises ; on opérera de la manière suivante.*

* Fig. 32.

1[ent]	Valeur donnée du côté AB - - - - -	826 *T.*
	Valeur donnée du côté BC - - -	504
	Somme de ces deux côtés - - - -	1330
	Différence de ces deux mêmes côtés -	322
2[ent]	Complément du logarithme du plus grand côté AC donné de 1029 *T.* - -	6.9875846
	Logarithme de la somme des côtés AB & BC, trouvée de 1330 *T.* - -	3.1238516
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 322 *T.* - - -	2.5078559
	Logarithme de la différence cherchée AG des parties du plus grand côté AC - -	12.6192921

qui (*b*) *donnera* $416\frac{497}{2610}$ *toises, ou* $416\frac{11}{58}$ *toises* p. p. *pour cette différence.*

(*b*) N. 100.

Or, en retranchant du côté AC *qui est donné de* 1029 *toises, cette différence* AG *que l'on vient de trouver de* 416$\frac{11}{58}$ *toises* p. p. *il restera* 612$\frac{47}{58}$ *toises* p. m. *pour la corde* CG, *dont la moitié* 306$\frac{47}{116}$ *toises* p. m. *sera la valeur du plus petit segment* DC. *Ainsi, dans le triangle* DBC, *on connoitra le côté* BC *opposé à l'angle droit* D, *de* 504 *toises, avec le côté* DC *de* 306$\frac{47}{116}$ *toises* p. m. *& par conséquent on trouvera de la manière suivante (a) l'angle* DBC. (a) N. 127.

Compl. du log. du côté BC, donné de 504 *T.*	7.2975695
Log. du côté DC trouvé de 306$\frac{47}{116}$ *T. p. m.* (*b*)	2.4862960
Logarithme du sinus de l'angle cherché DBC	9.7838655

(b) N. 84.

qui (c) *donnera* 37 *deg.* 26 *min.* 28 *s. pour la valeur de cet angle;* (c) N. 103.
& par conséquent (*d*), 52 *deg.* 33 *min.* 32 *sec. pour celle de l'angle* (d) E. L. 1.
demandé C. p. 32.

On trouvera ensuite les angles A *&* B, *de la même manière dont on a trouvé les angles* C *& B *au* N° 145.

150. *Mais il faut remarquer, que cette manière de trouver les angles d'un triangle dont les côtés sont connus, est plus longue que celle que nous avons enseignée au* N° 145. *Ainsi, nous ne démontrons ici le théorême sur lequel elle est fondée, que par rapport à l'utilité dont il peut être dans le Toisé & dans l'Arpentage, pour trouver la perpendiculaire d'un triangle dont on a mesuré les côtés.*

CHAPITRE III.

Des Usages de la Trigonométrie rectiligne.

PROBLEME PRÉLIMINAIRE.

151. *MEsurer un angle sur le terrein.*

* Fig. 33. Il faut mesurer l'angle FEG *, formé sur le terrein par des lignes droites tirées du point E aux points F & G.

Solution. Placez un *Graphométre* † au sommet E de l'angle proposé ; & disposez-le de maniére qu'en regardant par les pinnules qui sont aux extrémités de la régle fixe AB, vous apperceviez le point F. Assurez l'instrument dans cette position ; & dirigez la régle mobile CD vers G, de maniére qu'en regardant par les pinnules qui sont aux extrémités de cette autre regle, vous appercevíez le point G. Enfin, éxaminez combien

† Le *Graphométre* est un instrument de cuivre, qui est composé
* Fig. 33. d'un demi-cercle ADB *, de deux régles AB & CD, & d'un genou qui sert à poser cet instrument sur son pied, dans telle situation que l'on veut. Le demi-cercle est divisé en 180 deg. dont chacun est subdivisé, au moins en 10 parties égales. Les deux régles, (dont la premiére qui est fixe, est le diamétre de ce demi cercle ; & l'autre qui est mobile, tourne sur le centre E de ce même demi-cercle,) ont à chacune de leurs extrémités une petite lame de cuivre, qui est perpendiculaire à leur plan. Ces lames ont chacune une petite fente que l'on appelle *Pinnule*, & qui sert à diriger le rayon visuel. Enfin, on ajuste ordinairement une Boussole à cet instrument ; & il faut remarquer que l'on ne doit guères compter sur son éxactitude, lorsqu'il a moins d'un pied de diamétre.

l'arc DB qui est compris entre les régles AB & CD, contient de degrés & de parties de degrés ; & la valeur de cet arc sera celle de l'angle proposé FEG.

I. Usage.

152. *Mesurer la distance de deux points, dont il y en a un qui est inaccessible.*

On est placé au point A *; & l'on veut sçavoir de combien ce point est éloigné du point B. * Fig. 34.

Solution. Prenez dans la campagne un point D à volonté, (mais qui soit cependant telqu'on puisse y aller directement du point A); & après y avoir fait planter un piquet DC, mesurez (*a*) l'angle BAC formé par les rayons visuels tirés du point A aux points B & C. Faites ensuite planter un piquet au point A; & mesurez la distance † de ce point au point C. Enfin, mesurez (*b*) l'angle ACB formé par les rayons visuels tirés du point C aux points A & B.

(*a*) N. 150. (*b*) N. 151.

Par ce moyen, dans le triangle ACB formé par les rayons visuels AC & CB, & par la distance proposée AB, vous connoîtrez le côté AC, avec les angles BAC & ACB; ainsi vous trouverez cette distance (*c*). (*c*) N. 119.

II. Usage.

153. *Mesurer la distance de deux points*

† La distance ou le côté AC *, que l'on peut mesurer, & dont on peut voir réciproquement les deux extrêmités, se nomme la Base. Elle ne doit jamais être moins que le quart ou le cinquiéme de la distance que l'on veut mesurer. * Fig. 34.

qui sont tous les deux inaccessibles ; mais qui peuvent être vus des extrémités d'une même base.

*Fig. 35. Il faut mesurer la distance des points A * & B qui sont inaccessibles, mais qui peuvent être vus des extrémités d'une même base.

Solution. Après avoir pris dans la campagne deux points E & F à volonté, (mais qui soient cependant tels que l'on puisse aller de l'un à l'autre directement, & le plus parallelement † à la distance AB qu'il sera possible,) faites planter au point F un piquet FD. Mesurez en-(a) N.151. suite (*a*) l'angle ACB formé par les rayons visuels tirés du point C aux points A & B; & l'angle ACD formé par les rayons visuels tirés du même point C aux points A & D. Faites aussi planter un piquet au point E; & mesurez la distance de ce point au point F. Enfin, mesu-(b) N.151. rez (*b*) l'angle CDA formé par les rayons visuels tirés du point D aux points C & A; & l'angle CDB formé par les rayons visuels tirés du même point D aux points C & B.

Par ce moyen, 1ent dans le triangle ACD formé par les rayons visuels CA, CD & DA, vous connoîtrez le côté CD ou EF, avec les angles ACD & CDA; ainsi vous trouverez le (c) N.119. côté AC (*c*). 2ent Dans le triangle CDB formé par les rayons visuels CB, CD & DB, vous

† On prend une base la plus parallele qu'il est possible à la distance que l'on veut mesurer, afin d'éviter les angles trop aigus, ou trop obtus.

connoîtrez

connoîtrez le côté CD, avec les angles BCD † & CDB; ainsi vous trouverez le côté BC (a). (a) N. 119.
3me Enfin, dans le triangle ACB formé par les rayons visuels CA & CB, & par la distance proposée AB, vous connoîtrez les côtés AC & BC, avec l'angle ACB; ainsi vous trouverez cette distance (b). (b) N. 140.

III. USAGE.

154. *Mesurer la distance de deux points qui sont tous les deux inaccessibles, & ne peuvent être vus des extrémités d'une même base.*

Il faut mesurer la distance des points A * & B qui sont inaccessibles, & ne peuvent être vus des extrémités d'une même base. * Fig. 16.

Solution. Choisissez entre les points A & B, dont on vous propose de mesurer la distance, plusieurs points C, D, E, &c. que l'on puisse observer de fort loin; tels que sont les Clochers, les Tours, les Moulins, &c. Ensuite:

Premiérement, par le moyen d'une base GH, mesurez (c) la distance du point A au point C, (c) N. 151. celle du point H au même point C, & l'angle ACH. Par le moyen d'une autre base IK, mesurez (d) la distance du point C au point D, celle du point I au point C, celle du point K (d) N. 151. au point D, l'angle ICD, & l'angle CDK. Enfin, par le moyen d'une troisiéme base prise telle qu'elle conviendra à la position des points

† Cet angle est la différence des angles ACB & ACD, que l'on a mesurés.

(a) N. 152. & 153. H & I, mesurez (a) la distance de ces deux derniers points.

Par-là, 1^{ent} dans le triangle HCI formé par les rayons visuels HC, HI & IC, vous connoîtrez les trois côtés HC, HI & IC; ainsi vous trouverez l'angle HCI (b). 2^{ent} Dans le triangle ACD formé par les distances du point A au point C, du point C au point D, & du point A au même point D, vous connoîtrez les côtés AC & CD, avec l'angle ACD qui est la somme des angles ACH, HCI & ICD; ainsi vous trouverez (c) le côté AD, & l'angle CDA.

(b) N. 145.

(c) N. 140.

Secondement, par le moyen d'une base LM, mesurez (d), la distance du point D au point E, celle du point L au point D, celle du point M au point E, l'angle LDE, & l'angle DEM. Et par le moyen d'une autre base prise telle qu'elle conviendra à la position des points K & L, mesurez (e) la distance de ces deux derniers points.

(d) N. 153.

(e) N. 152. ou 153.

Par-là, 1^{ent} dans le triangle KDL formé par les rayons visuels KD, KL & LD, vous connoîtrez les trois côtés KD, KL & LD; ainsi vous trouverez l'angle KDL (f). 2^{ent} Dans le triangle ADE formé par les distances du point A au point D, du point D au point E, & du point A au même point E, vous connoîtrez les côtés AD & DE, avec l'angle ADE qui est la différence de la somme des an-

(f) N. 145.

gles ADK †, KDL & LDE à celle de quatre angles droits; ainsi vous trouverez (*a*) le côté AE, (a) N. 140.
& l'angle AED.

Troisiémement, comme la distance du point A au point E commence à devenir considérable par rapport à celle du point E au point F, il est à propos de comparer cette derniére à la distance du point F au point B; afin de mettre le plus d'égalité qu'il est possible entre les côtés des triangles. Ainsi, par le moyen d'une base NO, mesurez (*b*) la distance du point E au point F, (b) N. 153.
celle du point N au point E, celle du point O au point F, l'angle NEF, & l'angle EFO. Par le moyen d'une autre base PQ, mesurez (*c*) la (c) N. 153.
distance du point F au point B, celle du point P au point F, & l'angle PFB. Enfin, par le moyen d'une troisiéme base prise telle quelle conviendra à la position des points P & O, mesurez (*d*) la distance de ces deux derniers points. (d) N. 152. ou 153.

Par-là, 1[ent] dans le triangle OFP formé par les rayons visuels OF, OP & PF, vous connoîtrez les trois côtés OF, OP & PF; ainsi vous trouverez l'angle OFP (*e*). 2[ent] Dans le triangle EFB (e) N. 145.
formé par les distances du point E au point F, du point F au point B, & du point E au même point B, vous connoîtrez les côtés EF & FB, avec l'angle EFB qui est la différence de la somme des angles EFO, OFP & PFB à celle

† Cet angle est la différence de l'angle CDA à l'angle CDK, que l'on a trouvés.

de quatre angles droits ; ainsi vous trouverez
(a) N. 140. (a) le côté EB, & l'angle FEB.

Quatriémement enfin, par le moyen d'une base prise telle qu'elle conviendra à la position
(b) N. 152. ou 153. des points M & N, mesurez (b) la distance de ces deux points. Et par-là, 1^{ent} dans le triangle MEN formé par les rayons visuels ME, MN & NE, vous connoîtrez les trois côtés ME, MN & NE ; ainsi vous trouverez l'angle MEN (c).
(c) N. 145. 2^{ent} Dans le triangle AEB formé par les distances du point A au point E, du point E au point B, & du point A au même point B, vous connoîtrez les côtés AE & EB, avec l'angle AEB qui est la somme des angles AED, DEM, MEN, NEF & FEB ; ainsi vous trouverez (d) la distance demandée AB.
(d) N. 140.

SCHOLIE.

155. *On peut voir par cet exemple comment on doit s'y prendre, soit pour mesurer la distance de deux endroits qui seroient encore plus éloignés l'un de l'autre que ne le sont les points A * & B, & entre lesquels il faudroit par conséquent choisir un plus grand nombre de points remarquables ; soit pour mesurer celle de deux autres lieux A * & B qui seroient séparés l'un de l'autre par une Forêt, ou par quelque autre obstacle qui empêcheroit qu'on ne les vît tous les deux des extrémités d'une même base. Mais il faut ajoûter à la solution que nous venons de donner (e), les deux remarques suivantes, sans lesquelles on se tromperoit considérablement.*

* Fig. 36.
* Fig. 39.
(e) N. 154.

La premiére, *est que nous avons supposé dans un même plan les distances* AC *, CD, DE, *&c. & les rayons visuels* HC, IC, ID, *&c. Parce qu'autrement, l'angle* ACD *ne seroit point la somme des angles* ACH, HCI *&* ICD; *ni l'angle* ADE *la différence de la somme des angles* ADK, KDL *&* LDE *à celle de quatre angles droits; ni &c. Cependant ces lignes n'y sont presque jamais. Ainsi, il faut nécessairement commencer par les y réduire, avant que de calculer aucun des triangles* ACD, ADE, EFB *&* AEB. * Fig. 36.

Or pour cet effet, après avoir supposé un plan qui passe par les points A, H *&* B, *on observera (soit par quelqu'un des Nos suivans,* 170 171 *ou* 172; *soit d'une autre maniére,)* 1°. *De combien le point* C *est plus ou moins élevé que le point* H: 2°. *De combien les points* I, K *&* D *sont plus ou moins élevés que le point* C: 3°. *De combien les points* L, M *&* E *sont plus ou moins élevés que le point* D: 4°. *De combien les points* P *&* F *sont plus ou moins élevés que le point* B: 5°. *Enfin, de combien les points* N, O *&* F *sont plus ou moins élevés que le point* E.

Ensuite, 1er *si le point* C * *est plus ou moins élevé que le point* A, *la distance réduite de ces deux points sera le côté* AR *d'un triangle rectangle* ACR, *qui aura pour autre côté la différence de hauteur* CR; *& pour hypoténuse, la distance* AC *qui est connue par le calcul. Ainsi l'on trouvera cette distance* AR, *par le* No 132. *Or la dis-* * Fig. 37.

tance réduite des points H *&* C, *sera pareillement le côté* HR *d'un triangle rectangle* HCR, *qui aura pour autre côté la même différence de hauteur* CR; *& pour hypoténuse, le rayon visuel* HC *qui est aussi connu par le calcul. Ainsi, l'on trouvera aussi cette distance par le même* N° 132. *Et comme dans le triangle* ARH, *tous les côtés* AR, AH *&* HR *seront alors connus, on trouvera l'angle* ARH, *par le* N° 145.

*Fig. 37. 2[ent] *Si le point* I * *est plus ou moins élevé que le point* C, (*de maniére cependant que ces deux points soient tous les deux au dessus du plan* AHB, *ou tous les deux au-dessous:*) *leur distance réduite sera encore le côté* IS *d'un triangle rectangle* ICS, *qui aura pour autre côté la différence* CS *des différences de hauteur* IT *&* CR; *& pour hypoténuse, le rayon visuel* IC *qui est connu par le calcul, Ainsi, l'on trouvera encore cette distance par le même* N° 132. *On cherchera aussi la distance réduite* HT *des points* H *&* I, *de la même maniére dont on vient de s'y prendre pour trouver celle des points* H *&* C. *Et l'on trouvera ensuite par le même* N° 145, *l'angle* HRT *du triangle* HRT *dont tous les côtés* HR, HT *&* TR *qui est égal à* IS (*a*), *seront alors connus.*

(*a*) E. l. 1. p. 34.

*Fig. 38. 3[ent] *Si le point* D * *est plus ou moins élevé que le point* C, *de maniére que l'un de ces points étant au-dessus du plan* AHB, *l'autre soit au-dessous.* (*par exemple* C *au-dessus, &* D *au-dessous;*) *alors la hauteur* CR *du point* C, *la profondeur* DV *du point* D, *le rayon visuel* CD, *&*

la distance réduite RV *de ces deux points, formeront deux triangles* RCZ *&* VDZ, *qui seront rectangles (a), l'un en* R *& l'autre en* V; *& par conséquent équiangles (b), puisque les angles* RZC *&* VZD *seront égaux (c). Ainsi (d),* CR *sera à* DV, *comme* CZ *est à* ZD. *Donc en composant (e),* CR *&* DV *ensemble seront à* DV, *comme* CZ *&* ZD *ensemble, (c'est-à-dire* CD) *sont à* ZD. *Or,* CR, DV *&* CD *sont connues. Donc on trouvera: 1°. par une régle de proportion, la partie* ZD *du rayon visuel* CD: *2°. par une soustraction, l'autre partie* CZ *de ce même rayon visuel: 3°. par le Nº 132, les côtés* RZ *&* ZV *des triangles rectangles* RCZ *&* VDZ: *4°. enfin, par une addition, la distance réduite* RV *des points* C *&* D.

(a) E. l. 11. d. 2. (b) E. l. 1. p. 32. (c) E. l. 1. p. 15. (d) E. l. 6. p. 4. (e) E. l. 5. p. 18.

4

4^ent^ *On continuera à réduire au plan* AHB * *les autres distances* ID, KD, LD, ED, *&c. & à trouver les angles qu'elles formeront après leur réduction; de la même maniére dont nous venons de faire l'un & l'autre, dans les trois exemples précedents, qui renferment tous les cas qui peuvent se rencontrer. Et l'on aura l'attention de ne faire les calculs des triangles* ACD, ADE, EFB *&* AEB, *qu'avec ces distances réduites, & ces angles réduits.*

* Fig. 36.

La seconde, *est que la vraie distance du point* A * *au point* B *étant en rigueur, l'arc du grand cercle de la Terre qui est compris entre ces deux points, la ligne* AB *est seulement la corde*

* Fig 36.

qui soûtend cet arc. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'une distance un peu considérable, on doit avoir égard à la différence de cette corde à cet arc.

Or, pour cet effet, après avoir mesuré cette
(a) N. 154. *corde (a), on la considere comme étant la base du triangle isoscele dont chaque côté est un demi-*
(b) N. 329. *diamétre de la Terre, que l'on sçait être (b) de*
(c) N. 146. *3276344 toises. On cherche ensuite (c) la valeur de celui des angles de ce triangle, qui est opposé à cette même corde. Enfin, comme cette valeur est aussi celle de l'arc qui est compris entre les points dont on cherche la distance, puisque cet arc est la mesure de cet angle, on la multiplie par 57180; c'est-à-dire, par le nombre de*
(d) N. 329. *toises que contient (d) chaque degré d'un grand cercle de la Terre; & le produit donne la vraie distance de ces points.*

IV. USAGE.

156. *Percer une route dans une Forêt.*

* Fig. 39. Il faut percer dans la Forêt X *, une route qui aille directement du point A au point B.

Solution. Choisissez de même que dans l'usa-
(e) N. 154. ge précedent (e), des points remarquables C, D & E, interposés entre les points A & B, que l'on suppose ne pouvoir point être vus des extrémités d'une même base. Ensuite:

Premiérement, par le moyen d'une base FG,
(f) N. 153. mesurez (f) la distance du point A au point C, celle du point G au même point C, & l'angle ACG. Par le moyen d'une autre base HI,
(g) N. 153. mesurez (g) la distance du point C au point D, celle

telle du point H au point C, celle du point I au point D, l'angle HCD, & l'angle CDI. Enfin, par le moyen d'une troisiéme base prise telle qu'elle conviendra à la position des points G & H, mesurez (a) la distance de ces deux derniers points. (a) N. 152, ou 153.

Par-là, 1ent dans le triangle GCH formé par les rayons visuels GC, GH & HC, vous connoîtrez les trois côtés GC, GH & HC; ainsi vous trouverez l'angle GCH (b). 2ent Dans le triangle ACD formé par les distances du point A au point C, du point C au point D, & du point A au même point D, vous connoîtrez les côtés AC & CD, avec l'angle ACD qui est la différence de la somme des angles ACG, GCH & HCD à celle de quatre angles droits; ainsi vous trouverez le côté AD, & les angles ADC & DAC (c). (b) N. 145. (c) N. 140.

Secondement, par le moyen d'une base MN, mesurez (d) la distance du point B au point E, celle du point N au même point E, & l'angle BEN. Par le moyen d'une autre base KL, mesurez (e) la distance du point E au point D, celle du point K au point E, celle du point L au point D, l'angle KED, & l'angle LDE. Enfin, par le moyen d'une troisiéme base prise telle qu'elle conviendra à la position des points N & K, mesurez (f) la distance de ces deux derniers points. (d) N. 151. (e) N. 151. (f) N. 152, ou 153.

Par-là, 1ent dans le triangle NEK formé par les rayons visuels NE, NK & KE, vous

connoîtrez les trois côtés NE, NK & KE; ainsi vous trouverez l'angle NEK (a). 2[ent] Dans le triangle BED formé par les distances du point B au point E, du point E au point D, & du point B au même point D, vous connoîtrez les côtés BE & ED, avec l'angle BED qui est la différence de la somme des angles BEN, NEK & KED à celle de quatre angles droits; ainsi vous trouverez (b) le côté BD, & l'angle EDB.

(a) N. 145.

(b) N. 140.

Troisiémement, par le moyen d'une base prise telle qu'elle conviendra à la position des points I & L, mesurez (c) la distance de ces deux points. Et par-là, 1[ent] dans le triangle IDL formé par les rayons visuels ID, IL & LD, vous connoîtrez les trois côtés ID, IL & LD; ainsi vous trouverez l'angle IDL (d). 2[ent] Dans le triangle ADB formé par les distances du point A au point D, du point D au point B, & du point A au même point B, vous connoîtrez les côtés AD & BD, avec l'angle ADB qui est la différence de la somme des angles ADC, CDI, IDL, LDE & EDB à celle de quatre angles droits; ainsi, vous trouverez (e) l'angle BED; & par conséquent l'angle BAC, qui est la somme des angles BAD & DAC.

(c) N. 152. ou 153.

(d) N. 145.

(e) N. 136.

Quatriémement enfin, posez un Graphométre au point A. Dirigez sa régle fixe, vers le point C. Ouvrez ensuite sa régle mobile, de maniére qu'elle forme avec la régle fixe, un angle égal à l'angle trouvé BAC; & la route que vous ferez percer suivant l'alignement de

cette régle mobile, sera la route demandée.

SCHOLIE.

Nous avons supposé dans cet usage (de même que nous l'avons fait dans le précedent (a), & pour les mêmes raisons,) que tous les points A, C, D, E, B, F, G, H, &c. étoient dans un même plan; soit naturellement, soit par réduction.* (a) N. 154. * Fig. 39.

V. USAGE.

157. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied † est accessible, & de niveau avec le lieu auquel on est placé.*

Il faut mesurer la hauteur AB* de l'objet X dont le pied A est accessible, & de niveau avec le lieu auquel on est placé. * Fig. 40.

Solution. Prenez dans la campagne un point E à volonté; mais qui soit cependant de niveau avec le pied A de l'objet X, & tel que l'on puisse aller directement de ce point au pied de cet objet. Posez-y un Graphométre; & par le moyen d'un plomb suspendu au bout d'un fil, disposez-le de maniére que son plan étant vertical, sa régle fixe soit parfaitement horisontale. Assurez l'instrument dans cette position; & dirigez sa régle mobile, vers le sommet B de l'objet proposé, de maniére qu'en regardant par les fentes des pinnules qui sont aux extrémités de cette régle, vous apperceviez le sommet B,

† Par le *Pied* d'un objet, nous entendons le point auquel un plomb suspendu du haut de cet objet par le moyen d'un fil, rencontreroit le plan sur lequel ce même objet est élevé.

Examinez combien l'arc qui eſt compris entre la régle fixe & la régle mobile, contient de degrés & de parties de degrés. Enfin, meſurez la diſtance du pied E de l'inſtrument au pied A de l'objet.

Par ce moyen, dans le triangle CBD formé par la ligne horiſontale CD, par le rayon viſuel CB, & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté CD ou EA, l'angle BCD, & l'angle BDC qui eſt
(a) N.123. droit [H]; ainſi vous trouverez (*a*) cette partie BD, à laquelle ajoûtant la hauteur EC ou DA du pied de l'inſtrument, la ſomme ſera cette hauteur demandée.

VI. USAGE.

158. *Meſurer la hauteur d'un objet dont le pied eſt inacceſſible, mais de niveau avec le lieu auquel on eſt placé.*

* Fig. 41. Il faut meſurer la hauteur AB * de l'objet X dont le pied A eſt inacceſſible, mais de niveau avec le lieu auquel on eſt placé.

Solution. Prenez dans la campagne un point E à volonté, mais qui ſoit cependant de niveau avec le pied A de l'objet propoſé; & diſpoſez-y un Graphométre de la même maniére dont
(b) N.157. on l'a fait pour le cinquiéme uſage (*b*). Meſurez l'angle BCD formé par la ligne horiſontale CD, & par le rayon viſuel tiré du point C au ſommet B de l'objet X. Laiſſez le Graphométre dans cette poſition, & en regardant par les fentes des pinnules qui ſont aux extrémités

de sa régle fixe, faites planter dans l'alignement de la ligne horisontale CD un piquet FG, qui soit à une distance du point E suffisante pour donner une base d'une grandeur raisonnable au triangle CBG. Transportez le Graphométre au point F, & après l'y avoir disposé de la même maniére qu'il l'étoit au point E, mesurez l'angle BGD formé par la ligne horisontale GD, & par le rayon visuel tiré du point G au même point précedent B. Enfin, mesurez la distance du point E au point F.

Par ce moyen, 1[ent] dans le triangle CBG formé par les rayons visuels CB & GB, & par la ligne horisontale CG, vous connoîtrez le côté CG, l'angle BCD, & l'angle BGC qui est le supplément de l'angle BGD ; ainsi vous trouverez le côté BG (*a*). 2[ent] Dans le triangle GBD formé par le rayon visuel GB, par la ligne horisontale GD & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté BG, l'angle BGD, & l'angle BDG qui est droit [H] ; ainsi, vous trouverez (*b*) cette partie BD, à laquelle ajoûtant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument, la somme sera cette hauteur demandée.

(*a*) N. 119.
(*b*) N. 119.

Autre solution, *qui n'exige qu'un seul point* E* *de niveau avec le pied* A *de l'objet proposé.*

* Fig. 42.

159. APRE'S avoir mesuré l'angle BCD de la même maniére dont on a dit dans la solution précedente qu'il falloit le faire, choisissez dans la campagne un point F à volonté, mais

qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point E; & faites-y planter un
(a) N. 151. piquet FG. Mesurez (*a*) ensuite l'angle BCG formé par les rayons visuels tirés du point C aux points B & G. Faites aussi planter un piquet au point E, & mesurez la distance de ce
(b) N. 152. point au point F. Enfin, mesurez (*b*) l'angle BGC formé par les rayons visuels tirés du point G aux points B & C.

Par ce moyen, 1[ent] dans le triangle CBG formé par les rayons visuels CB, CG & GB, vous connoîtrez le côté CG ou EF, avec les angles BCG, & BGC; ainsi vous trouverez le
(c) N. 119. côté CB (*c*). 2[ent] Dans le triangle CBD formé par le rayon visuel CB, par la ligne horisontale CD, & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté CB, l'angle BCD, & l'angle DDC qui est droit;
(d) N. 119. ainsi vous trouverez (*d*) cette partie BD, à laquelle ajoûtant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument, la somme sera cette hauteur demandée.

Autre solution, *qui suppose que l'on peut voir*
* Fig. 43. *le pied* A * *de l'objet proposé, mais qui n'exige aussi qu'un seul point* E *de niveau avec ce pied.*

160. APRE's avoir mesuré l'angle BCD de la même maniére dont on a dît dans la pre-
(e) N. 158. miére solution (*e*) qu'il falloit le faire, choisissez dans la campagne un point F à volonté, mais qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point E; & faites-y plan-

ur un piquet FG. Mesurez ensuite (*a*) l'an- (a) N. 151.
gle DCG formé par la ligne horisontale CD, & par rayon visuel tiré du point C au point G. Faites aussi planter un piquet au point E; & mesurez la distance de ce point au point F. Enfin, mesurez (*b*) l'angle DGC formé par les (b) N. 151.
rayons visuels tirés du point G aux points D & C.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle CDG formé par les rayons visuels CG & GD, & par la ligne horisontale CD, vous connoîtrez le côté CG ou EF, avec les angles DCG, & DGC; ainsi vous trouverez le côté CD (*c*). 2^{ent} Dans (c) N. 119.
le triangle CBD formé par le rayon visuel CB, par la ligne horisontale CD, & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté CD, l'angle BCD, & l'angle BDC qui est droit; ainsi vous trouverez (*d*) cette (d) N. 123.
partie BD, à laquelle ajoûtant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument, la somme sera cette hauteur demandée.

VII. Usage.

161. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied est inaccessible, & plus élevé que le lieu auquel on est placé.*

Il faut mesurer la hauteur AB* de l'objet X, * Fig. 44.
qui est situé sur une Montagne Y.

Solution. Prenez dans la campagne un point E à volonté, & après y avoir disposé un Graphométre de la même maniére dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cinquiéme usage (*e*), (e) N. 159.

mesurez les angles BCD & ACD formés par la ligne horisontale CD, & par les rayons visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son pied A. Laissez le Graphométre dans cette position; & en regardant par les fentes des pinnules qui sont aux extrémités de sa régle fixe, faites planter dans l'alignement de la ligne horisontale CD un piquet FG, qui soit à une distance du point E, suffisante pour donner une base d'une grandeur raisonnable au triangle CBG. Transportez le Graphométre au point F; & après l'y avoir disposé de la même maniére qu'il l'étoit au point E, mesurez les angles BGD & AGD formés par la ligne horisontale GD, & par les rayons visuels tirés du point G, l'un au même point précedent B, & l'autre au même point précedent A. Enfin, mesurez la distance du point E au point F.

Par ce moyen, 1ent dans le triangle CBG formé par les rayons visuels CB & GB, & par la ligne horisontale CG, vous connoîtrez le côté CG ou EF, l'angle BCD, & l'angle BGC qui est le supplément de l'an-
(a) N. 119. gle BGD; ainsi vous trouverez le côté BG (*a*).
2ent Dans le triangle GBD formé par le rayon visuel GB, par la ligne horisontale GD, & par la partie BD de la hauteur de l'objet proposé X & de la Montagne Y, vous connoîtrez le côté BG, l'angle BGD, & l'angle BDG qui est
(b) N. 119. droit; ainsi vous trouverez cette partie BD (*b*).

3ent

3ent Dans le triangle CAG formé par les rayons visuels CA & GA, & par la ligne horisontale CG, vous connoîtrez le côté CG ou EF, l'angle ACD, & l'angle AGC qui est le supplément de l'angle AGD ; ainsi vous trouverez le côté AG (*a*). 4ent Enfin, dans le triangle GAD formé par le rayon visuel GA, par la ligne horisontale GD, & par la partie AD de la hauteur de la Montagne Y, vous connoîtrez le côté AG, l'angle AGD, & l'angle ADG qui est droit ; ainsi vous trouverez (*b*) cette partie AD, dont la différence à la partie BD sera la hauteur demandée AB.

(*a*) N. 119.

(*b*) N. 119.

Autre solution, *qui n'exige pas que les points ausquels on place l'instrument, soient de niveau.*

162. APRE'S avoir pris dans la campagne un point F * à volonté, & y avoir disposé le Graphométre de la maniére dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cinquiéme usage (*c*), mesurez les angles BGE & DGE formés par la ligne horisontale GE, & par les rayons visuels tirés du point G, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre au sommet D d'un autre objet de niveau avec le pied A du même objet X. Choisissez ensuite dans la campagne un autre point H à volonté, & qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point F; & après y avoir fait planter un piquet HI, mesurez (*d*) les angles BGI & DGI formés par les rayons visuels tirés du point G aux points B, D & I. Faites aussi planter un piquet au point F;

* Fig. 45.

(*c*) N. 157.

(*d*) N. 151.

& mesurez la distance de ce point au point H.
(a) N. 151. Enfin, mesurez (a) les angles BIG & DIG formés par les rayons visuels tirés du point I aux points B, D & G.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle GBI formé par les rayons visuels GB, GI & IB, vous connoîtrez le côté GI ou FH, avec les angles BGI & BIG; ainsi vous trouverez le
(b) N. 119. côté BG (b). 2^{ent} Dans le triangle GDI formé par les rayons visuels GD, GI & ID, vous connoîtrez le côté GI ou FH, avec les angles DGI
(c) N. 119. & DIG; ainsi vous trouverez le côte DG (c). 3^{ent} Dans le triangle GBE formé par le rayon visuel GB, par la ligne horisontale GE, & par la hauteur BE, vous connoîtrez le côté BG, l'angle BGE, & l'angle BEG qui est droit; ainsi
(d) N. 119. vous trouverez cette hauteur (d). 4^{ent} Enfin, dans le triangle GDC formé par le rayon visuel GD, par la ligne horisontale GC, & par la hauteur DC, vous connoîtrez le côté DG, l'angle DGE, & l'angle DCG qui est droit; ainsi vous trou-
(e) N. 119. verez (e) cette hauteur DC, dont la différence à la hauteur BE sera la hauteur demandée AB.

Autre solution, *qui suppose que l'on peut voir*
* Fig. 46. *le pied* A * *de l'objet proposé; mais qui n'exige pas non plus, que les points ausquels on place l'instrument soient de niveau.*

163. PRENEZ dans la campagne un point C à volonté; & après y avoir disposé un Grapho-
(f) N. 157. métre (f) de maniére que son plan soit verti-
(g) N. 151. cal, mesurez (g) l'angle BDA formé par les

yons visuels tirés du point D, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son ied A. Choisissez ensuite dans la campagne n autre point E à volonté, mais qui soit ependant tel que l'on puisse y aller directement du point C; & après y avoir fait planter un piquet EF, mesurez (a) les angles BDF t ADF formés par les rayons visuels tirés du oint D aux points B, A & F. Faites aussi planter un piquet au point C; & mesurez la distance de ce point au point E. Enfin, mesurez (b) les angles BFD & AFD formés par les rayons visuels tirés du point F aux points B, A & D.

(a) N. 151.

(b) N. 151.

Par ce moyen, 1ent dans le triangle DBF formé par les rayons visuels DB, DF & FB, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainsi vous trouverez le côté BD (c). 2ent Dans le triangle DAF formé par les rayons visuels DA, DF & FA, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles ADF & AFD; ainsi vous trouverez le côté AD (d). 3ent Enfin, dans le triangle DBA formé par les rayons visuels DB & DA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi vous trouverez cette hauteur (e).

(c) N. 119.

(d) N. 119.

(e) N. 140.

VIII. USAGE.

164. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied est inaccessible, & moins élevé que le lieu auquel on est placé.*

Il faut de dessus la Montagne Y*, mesurer la hauteur AB de l'objet X.

* Fig. 47.

Solution. Prenez ſur cette Montagne un point C à volonté; & après y avoir diſpoſé un Graphométre, de la même maniére dont on a
(a) N. 157. dit qu'il falloit le faire pour le Ve uſage (*a*), meſurez les angles ADF & BDF formés par la ligne horiſontale DF, & par les rayons viſuels tirés du point D, l'un au pied A de l'objet propoſé X, & l'autre à ſon ſommet B. Faites enſuite planter un piquet EF dans l'alignement de la ligne horiſontale DF, de la même maniére dont on a dit dans les uſages précedents qu'il falloit le faire; & meſurez la diſtance du point C au point E. Enfin, tranſportez le Graphométre au point E; & après l'y avoir diſpoſé de la même maniére qu'il l'étoit au point C, meſurez l'angle BFD formé par la même ligne horiſontale précédente DF, & par le rayon viſuel tiré du point F au point B.

Par ce moyen, 1^ent dans le triangle DBF formé par les rayons viſuels DB & FB, & par la ligne horiſontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainſi
(b) N. 119. vous trouverez le côté DB (*b*). 2^ent Dans le triangle DBG formé par le rayon viſuel DB, par la ligne verticale DG, & par la ligne horiſontale GB, vous connoîtrez le côté DB, l'angle DGB qui eſt droit, & l'angle BDG qui eſt le complement de l'angle BDF; ainſi vous
(c) N. 119. trouverez (*c*) cette ligne verticale DG, & cette ligne horiſontale GB. 3^ent Enfin, dans le triangle DAH formé par le rayon viſuel DA,

par la ligne verticale DH, & par la ligne horisontale HA, vous connoîtrez le côté HA qui est egal à la ligne horisontale GB, l'angle DHA qui est droit, & l'angle ADH qui est le complément de l'angle ADF ; ainsi vous trouverez (a) cette verticale DH, dont l'excès GH sur la verticale DG est égal à la hauteur demandée AB. (a) N. 123.

Autre solution, *qui n'exige pas que les points ausquels on place l'instrument, soient de niveau.*

165. PRENEZ sur la hauteur Y * un point E à volonté ; & après y avoir disposé un Graphométre (b) de maniére que son plan soit vertical, mesurez (c) l'angle BCA formé par les rayons visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son pied A. Choisissez ensuite une base EF à volonté ; & mesurez (d) les distances du point C aux points B & A, lesquelles distances sont accessibles par leur extrémité C. * Fig. 48. (b) N. 157. (c) N. 151. (d) N. 152.

Par ce moyen, dans le triangle BCA formé par les rayons visuels CB & CA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés CB & CA, avec l'angle BCA ; ainsi vous trouverez (e) cette hauteur. (e) N. 140.

Autre solution, *qui suppose que l'on ne peut point voir le pied de l'objet proposé.*

166. PRENEZ sur la hauteur Y * un point C à volonté ; & disposez-y un Graphométre de la même maniére que dans la premiére solution (f), afin de mesurer les angles GDF & BDF formés par la ligne horisontale DF, * Fig. 49. (f) N. 164.

& par les rayons visuels tirés du point D, l'un à un point quelconque G de niveau avec le pied A de la hauteur proposée AB, & l'autre au sommet B de la même hauteur. Faites ensuite planter un piquet EF dans l'alignement de la ligne horisontale DF, de la même maniére dont on a dit dans les usages précedents qu'il falloit le faire; & mesurez la distance du point C au point E. Enfin, transportez le Graphométre au point E; & après l'y avoir disposé de la même maniére qu'il l'étoit au point C, mesurez les angles BFD & GFD formés par la même ligne horisontale précédente DF, & par les rayons visuels tirés du point F aux points précedents B & G.

Par ce moyen, 1ent dans le triangle DGF formé par les rayons visuels DG & FG, & par la ligne horisontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles GDF & GFD; (a) N. 119. ainsi vous trouverez le côté FG (*a*). 2ent Dans le triangle DBF formé par les rayons visuels DB & FB, & par la ligne horisontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainsi vous trouverez le (b) N. 119. côté FB (*b*). 3ent Dans le triangle GFB formé par les rayons visuels FG & FB, & par la distance du point G au point B, vous connoîtrez les côtés FG & FB, avec l'angle GFB qui est la différence de l'angle GFD à l'angle BFD; ainsi vous trouverez (*c*) l'angle GBF, & cette distance GB. 4ent Enfin, dans le triangle GBA

formé par cette même distance GB, par la ligne horisontale GA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté GB, l'angle GAB qui est droit, & l'angle GBA qui est la différence de la somme des angles connus GBF & FBH † à celle de deux angles droits; ainsi vous trouverez cette hauteur (a). (a) N. 119.

IX. USAGE.

167. *Mesurer la hauteur & la distance d'un objet inaccessible, qui ne peut être vû que de certains endroits.*

Il faut mesurer la hauteur AB * & la distance FA de l'objet X, qui ne peut être vû que des points C & D. * Fig. 50.

Solution. Posez un Graphométre au point C; & mesurez, de la même maniére dont on a dit dans les usages précedents qu'il falloit le faire, 1ent les angles BCA, BCD & ACD formés par les rayons visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, l'autre à son pied A, & le dernier à l'autre point D duquel on peut voir le même objet X : 2ent, l'angle ACF formé par la ligne verticale CF, & par le rayon visuel tiré du point C au point A. Transportez ensuite le Graphométre au point D; & mesurez (b) les angles BDC & ADC formés par les rayons visuels tirés du point D, l'un au point précedent B, l'autre au point préce- (b) N. 151.

† L'angle FBH est le complément de l'angle BFH; & l'angle BFH est le supplément de l'angle BFD que l'on a mesuré.

dent A, & le dernier au point C auquel on a fait la premiére opération. Enfin, par le moyen d'une base prise à volonté, mesurez la distance
(a) N. 153. du point C au point D (a), & la hauteur ver-
(b) N. 157. ou 158. ticale CF du point C (b).

Par ce moyen, 1ent dans le triangle CBD formé par les rayons visuels CB, CD & DB, vous connoîtrez le côté CD, avec les angles BCD
(c) N. 119. & BDC; ainsi vous trouverez le côté BC (c). 2ent Dans le triangle CAD formé par les rayons visuels CA, CD & DA, vous connoîtrez le côté CD, avec les angles ACD & ADC;
(d) N. 119. ainsi vous trouverez le côté AC (d). 3ent Dans le triangle BCA formé par les rayons visuels CB & CA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés BC & AC, avec l'angle BCA; ainsi vous trouverez cette hau-
(e) N. 140. teur (e). 4ent Enfin, dans le triangle FCA formé par le rayon visuel CA, par la hauteur verticale CF, & par la distance demandée FA, vous connoîtrez les côtés CF & AC, avec l'angle ACF; ainsi vous trouverez cette distan-
(f) N. 140. ce (f).

X. Usage.

168. *Mesurer la grandeur d'un objet accessible, qui est incliné à l'horison.*

* Fig. 51. Il faut mesurer la grandeur AB * de l'objet accessible X, qui est incliné à l'horison.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté, & mesurez la distance de ce point au pied A de l'objet proposé X. Posez ensuite un

un Graphométre à ce même point, & mesurez (a) les angles BDA & ADC formés, l'un (a) N. 151.
par les rayons visuels tirés du point D au sommet B & au pied A de ce même objet, & l'autre par le rayon visuel précedent DA, & par le pied DC de l'instrument. Enfin, par le moyen d'une base CE prise à volonté, mesurez (b) la distance du point D au point B, laquelle est accessible par son extrémité D. (b) N. 152.

Par ce moyen, 1ent dans le triangle CDA † formé par la distance CA, par le rayon visuel DA & par la hauteur DC du pied de l'instrument, vous connoîtrez les côtés DC & CA, avec l'angle ADC; ainsi vous trouverez le côté AD (c). (c) N. 128.
2ent Dans le triangle DBA formé par les rayons visuels DB & DA, & par la grandeur AB de l'objet proposé, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi vous trouverez (d) cette grandeur demandée. (d) N. 140.

XI. Usage.

169. *Mesurer la grandeur d'un objet inaccessible, qui est incliné à l'horison.*

Il faut mesurer la grandeur de l'objet inaccessible AB *, qui est incliné à l'horison. * Fig. 52.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté; & après y avoir posé un Graphométre, mesurez (e) l'angle BDA formé par les rayons visuels tirés du point D, l'un au (e) N. 151.

† Lorsque la distance du point C au point A est un peu considérable, on peut prendre le triangle CDA pour un triangle isoscele.

sommet B de l'objet proposé, & l'autre à son
(a) N. 152. pied A. Mesurez ensuite (a) par le moyen d'une base CE prise à volonté, les distances du point D aux points B & A, lesquelles sont accessibles par leur extrémité D.

Par ce moyen, dans le triangle DBA formé par les rayons visuels DB & DA, & par la grandeur AB de l'objet proposé, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi
(b) N. 140. vous trouverez (b) cette grandeur demandée.

XII. USAGE.

170. *Mesurer de combien un lieu est plus élevé que celui auquel on est situé.*

* Fig. 53. On est placé au point C *, & l'on veut sçavoir de combien ce point est moins élevé que le point B.

Solution. Posez un Graphométre au point C; & après l'avoir disposé de la même maniére dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cin-
(c) N. 157. quiéme usage (c), mesurez l'angle BDG formé par la ligne horisontale DG, & par le rayon visuel tiré du point D au point proposé B. Me-
(d) N. 152. surez ensuite (d) par le moyen d'une base CE prise à volonté, la distance du point D au même point B, laquelle est accessible par son extrémité D.

Par ce moyen, dans le triangle DBG formé par la ligne horisontale DG, par le rayon visuel DB, & par la partie BG de la hauteur demandée, vous connoîtrez le côté BD, l'angle BDG, & l'angle BGD qui est droit; ainsi

vous trouverez (*a*) cette partie BG, à laquelle ajoûtant la hauteur CD ou GA du pied de l'instrument, la somme AB sera la quantité dont le point B est plus élevé que le point C. (*a*) N. 119.

XIII. USAGE.

171. *Mesurer de combien un lieu est moins élevé que celui auquel on est situé.*

On est placé au point C*, & l'on veut sçavoir de combien ce point est plus élevé que le point A. * Fig. 54.

Solution. Posez un Graphométre au point C; & après l'avoir disposé de la même maniére dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cinquiéme usage (*b*), mesurez l'angle BDA formé par la ligne horisontale DB, & par le rayon visuel tiré du point D au point proposé A. Mesurez ensuite (*c*) par le moyen d'une base CE prise à volonté, la distance du point D au même point A, laquelle est accessible par son extrémité D. (*b*) N. 157. (*c*) N. 152.

Par ce moyen, dans le triangle DBA formé par la ligne horisontale DB, par le rayon visuel DA, & par la hauteur AB, vous connoîtrez le côté AD, l'angle BDA, & l'angle B qui est droit; ainsi vous trouverez (*d*) cette hauteur AB, dont l'excès AG sur la hauteur CD ou BG du pied de l'instrument, sera la quantité dont le point A est moins élevé que le point C. (*d*) N. 119.

XIV. USAGE.

172. *Mesurer de combien un lieu quelconque est plus ou moins élevé qu'un autre.*

Fig. 55. Il faut mesurer de combien le point A est plus ou moins élevé que le point B.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté, & qui soit cependant tel que l'on puisse voir de ce point les deux endroits proposés A & B; & après y avoir posé un Graphométre, mesurez (*a*) de combien le point A est plus ou moins élevé que le point C; & de combien le point B est aussi plus ou moins élevé que le même point C. Comparez ensuite ces deux élévations à celle du point C, & vous connoîtrez de combien le point A est plus ou moins élevé que le point B.

(a) N. 170. ou 171.

Ainsi, dans cet exemple où le point A est plus élevé que le point C de la quantité AD, & où le point B est au contraire moins élevé que le même point C de la quantité EB; le point A est plus élevé que le point B, de la somme de ces deux quantités AD & EB.

Si au contraire le point A étant plus élevé que le point C de cette même quantité AD, le point B étoit aussi plus élevé que ce même point C de la quantité EB; le point A seroit plus élevé que le point B, de la différence de ces deux quantités AD & EB. Et il en est de même des autres cas qui peuvent se rencontrer.

SCHOLIE I.

173. *Si par rapport à l'éloignement, ou à quelqu'autre obstacle, on ne pouvoit pas voir d'un même endroit les deux points proposés, ou*

prendroit des points interposés entre ces deux points, de la même maniére que s'il étoit question de mesurer leur distance (a). Et en cherchant ensuite (b) de combien le premier seroit plus ou moins élevé que le second, de combien le second seroit plus ou moins élevé que le troisiéme, & ainsi de suite, on parviendroit enfin à connoître de combien le premier seroit plus ou moins élevé que le dernier.

(a) N. 154. (b) N. 172.

SCHOLIE II.

174. Nous n'avons point eu d'égard dans les Nos 70 & 71, ni par conséquent dans le 72eme, à l'excès BD * du niveau apparent sur le vrai niveau. Cependant, comme on ne doit point négliger cet excès, lorsque la distance des points dont il s'agit est un peu considérable, il faut le connoître, afin de l'ajoûter à la différence de hauteur que l'on aura trouvée entre ces deux points, lorsque celui auquel on aura posé l'instrument sera le moins élevé *; & de le retrancher au contraire de cette même différence, lorsque ce même point sera le plus élevé *. Or pour cet effet, on cherchera (c) la valeur du côté CD du triangle CAD, dans lequel on connoît l'angle A, avec les côtés AC & AD, puisque cet angle A est droit (d), que le côté AC qui est le demi-diamétre de la Terre est de 3276344 toises, & que le côté AD est la distance horisontale du point auquel on est situé, au point dont on cherche l'élévation; & l'on retranchera ensuite de cette valeur, le même demi-diamétre AC ou BC.

* Fig. 56. * Fig. 53. * Fig. 54. (c) N. 140. (d) E. l. 3. p. 18.

XV. USAGE.

175. *Mesurer de combieu un objet inaccessible quelconque est incliné à l'horison.*

Il faut mesurer de combien l'objet inacces-
* Fig. 57. sible AB * est incliné à l'horison.

(a) N. 169. *Solution.* Mesurez (*a*) la grandeur AB de
(b). N. 172. l'objet proposé. Mesurez aussi (*b*) de combien le sommet B de ce même objet, est plus élevé que son pied A †.

Par ce moyen, dans le triangle ABC formé par l'objet proposé AB, par la ligne horisontale AC, & par la ligne verticale BC, vous connoîtrez les côtés AB & BC, avec l'angle BCA qui est droit; ainsi vous trouverez (*c*) l'incli-
(c) N. 127. naison BAC demandée.

XVI. USAGE.

176. *Mesurer la surface d'un triangle-rectiligne quelconque.*

* Fig. 58. Il faut mesurer la surface du triangle ABC *.

Solution. Posez un Graphométre à l'un quelconque des angles du triangle proposé, par exemple à l'angle A; & faites planter un piquet à chacun des autres angles B & C. Me-
(d) N. 151. surez ensuite (*d*) l'angle EFD formé par les rayons visuels tirés du point F aux points E & D. Enfin, mesurez les côtés AB & AC.

Par ce moyen, 1[ent] dans le triangle ABG, vous connoîtrez le côté AB, l'angle BAG ou EFD, & l'angle BGA qui est droit; ainsi

† On ne doit point avoir ici d'égard à la différence du niveau vrai au niveau apparent.

vous trouverez (*a*) la perpendiculaire BG. (a) N. 119.
2^{ent} Dans le triangle proposé ABC, vous connoîtrez la base AC, avec la perpendiculaire BG; ainsi vous trouverez (*b*) la surface demandée. (b) E. l. 1. p. 41.

XVII. USAGE.

177. *Mesurer la surface d'un Polygone rectiligne quelconque.*

Il faut mesurer la surface du Polygone ABCDEF *. * Fig. 59.

Solution. Posez un Graphométre à l'un quelconque des angles du Polygone proposé, par exemple à l'angle A; & faites planter un piquet à chacun des autres angles B, C, D, E & F. Mesurez ensuite (*c*) les angles LOK, KOI, (c) N. 151. IOH & HOG formés par les rayons visuels tirés du point O aux points L, K, I, H & G. Enfin, mesurez les distances du point A aux points F, E, D, C & B.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle AFM vous connoîtrez le côté AF, l'angle FAM ou LOK, & l'angle FMA qui est droit : ainsi vous trouverez la perpendiculaire FM (*d*); & (d) N. 119. par conséquent (*e*), la surface du triangle AFE. (e) E. l. 1. p. 41. 2^{ent} Dans le triangle AEN vous connoîtrez le côté AE, l'angle EAN ou KOI, & l'angle ENA qui est droit : ainsi vous trouverez (*f*) la perpendiculaire EN; & par conséquent (*g*), la surface du triangle AED. (f) N. 119. (g) E. l. 1. p. 41. 3^{ent} Dans le triangle ADP vous connoîtrez le côté AD, l'angle DAP ou IOH, & l'angle DPA qui est droit : ainsi vous trouverez (*h*) la perpendiculaire DP; & (h) N. 119.

(a) E. l. 1. p 41. par conséquent (a), la surface du triangle ADC. 4ent Dans le triangle ACQ vous connoîtrez le côté AC, l'angle CAQ ou HOG, & l'angle CQA qui est droit : ainsi vous trouverez (b) la perpendiculaire CQ ; & par conséquent (c), la surface du triangle ACB. 5ent Enfin, vous ajoûterez ensemble les surfaces de ces triangles AFE, AED, ADC & ACB que vous venez de mesurer, & la somme sera la surface demandée.

(b) N. 119.

(c) E. l. 1. p. 41.

SCHOLIE.

178. *Le moyen le plus facile, & en même temps le plus exact, de mesurer les distances du point* A * *aux points* F, E, D, *&c. est de les considerer comme n'étant accessibles que par leur extrémité* A ; *& de les mesurer par conséquent de la maniére dont nous avons dit* (d) *qu'il faut mesurer ces sortes de distances. Mais, comme les différents angles que ces mêmes distances forment avec les côtés* AF *&* AB *de l'angle auquel on a placé le Graphométre, sont déja mesurés* (e), *on prendra pour base l'un de ces côtés, prolongé s'il est nécessaire, par exemple le côté* AB, *& l'on mesurera cette base. On mesurera aussi* (f) *les angles* LGO, KGO, IGO *&* HGO *formés par les rayons visuels tirés de l'extrémité* G *de cette même base aux points* O, L, K, I *&* H. *Or, par ce moyen,* 1ent *dans le triangle* OLG *formé par les rayons visuels* OL, OG *&* GL, *on connoîtra le côté* OG *ou* AB, *l'angle* LGO, *& l'angle* LOG *qui est la somme des angles* LOK, KOI, IOH *&* HOG ; *ainsi l'on trouvera* (g) *le côté*

* Fig. 59.

(d) N. 152.

(e) N. 177.

(f) N. 151.

(g) N. 119.

té OL *ou* AF. 2^{ent} *Dans le triangle* OKG *formé par les rayons visuels* OK, OG *&* GK, *on connoîtra le côté* OG *ou* AB, *l'angle* KGO, *& l'angle* KOG *qui est la somme des angles* KOI, IOH *&* HOG; *ainsi, l'on trouvera (a) le côté* OK *ou* AE. 3^{ent} *Dans le triangle* OIG *formé par les rayons visuels* OI, OG *&* GI, *on connoîtra le côté* OG *ou* AB, *l'angle* IGO, *& l'angle* IOG *qui est la somme des angles* IOH *&* HOG; *ainsi, l'on trouvera (b) le côté* OI *ou* AD. 4^{ent} *Enfin, dans le triangle* HOG *formé par les rayons visuels* OH, OG *&* GH, *on connoîtra le côté* OG *ou* AB, *avec les angles* HGO *&* HOG; *ainsi, l'on trouvera (c) le côté* OH *ou* AC.

(a) N. 119.
(b) N. 119.
(c) N. 119.

XVIII. USAGE.

179. *Calculer les différentes parties d'une Fortification dont on sçait la construction, & dont on connoît le côté extérieur.*

On donne le côté extérieur AF * du front de Fortification X, construit suivant le systême de M. de Vauban; & il faut en trouver les autres parties.

* Fig. 60.

Premiérement,

180. *Pour trouver celles des Bastions, & des ouvrages à Corne & à Couronne.*

Constr. Tirez du sommet de l'angle flanqué A * au sommet de l'angle flanqué F, & du sommet de l'angle de l'épaule B au sommet de l'angle de l'épaule E, les lignes droites AF & BE. Prolongez les faces AB & FE des Bastions, jusqu'à

* Fig. 61.

ce qu'elles rencontrent en des points D & C, la Courtine CD. Enfin, abbaissez des points B & H, les perpendiculaires BK & HG au côté
(a) E. l. 1. p. 12. extérieur AF (a).

Solution. 1ent Dans le triangle AHG, le côté GH qui est la perpendiculaire, est connu par la construction de l'ouvrage. On connoît aussi le côté AG qui est la moitié du côté extérieur AF, avec l'angle AGH qui est droit [c].
(b) N. 139. Ainsi, l'on trouvera (b) l'angle diminué GAH.

2ent Dans le triangle ABK, le côté AB qui est la face du Bastion, est connu par la construction de l'ouvrage. On connoît aussi l'angle GAH, avec l'angle AKB qui est droit [c]. Ainsi, l'on
(c) N. 119. trouvera (c) le côté AK.

3ent Dans le triangle EBD, on connoît l'angle EBD qui est l'angle extérieur des paral-
(d) E. l. 1. p. 29. leles AF & BE, & par conséquent égal (d) à
(e) E. l. 1. p. 32. l'angle intérieur GAH (e). On connoît aussi l'angle BDE, ou l'angle BED; puisque suivant la construction de l'ouvrage, le triangle EBD est isoscele. Enfin, on connoît le côté BE; puis-
(f) E. l. 1. p. 34. que sa moitié BI est égale (f) à la différence KG de la ligne AK à la ligne AG. Ainsi, l'on trou-
(g) N. 119. vera (g) le flanc ED.

4ent Dans le triangle CDE, on connoît le côté ED. On connoît aussi l'angle DCE; puisque l'angle GAH est égal à l'angle GFH, & que les lignes CD & AF étant paralleles, les
(h) E. l. 1. p. 29. angles alternes GFH & DCE sont égaux (h). Enfin, on connoît l'angle flanquant CDE, qui

est la somme des angles BDE & BDC ou DCE. Ainsi l'on trouvera (a) la Courtine CD. (a) N. 119.

5eme Le demi-angle flanqué BAL, avec l'angle de l'épaule FED sont aussi connus. Puisque le premier est la différence de l'angle diminué GAH au demi-angle du Polygone FAL; & que le dernier est le supplément de l'angle DEC du triangle CDE.

6eme Enfin, dans le triangle ADL, on connoît le côté AD qui est la somme de la face AB du Bastion, & du côté BD du triangle isoscele EBD. On connoît aussi l'angle BDC, avec l'angle BAL. Ainsi, l'on trouvera (b) la capitale AL; & la demi-gorge CL, qui est la différence de la Courtine CD au côté LD. (b) N. 1[illegible]

Secondement,

181. *Pour trouver celles de la Demi-Lune.*

Constr. Prolongez les faces NA *, AB & PO, jusqu'à ce qu'elles rencontrent, l'une la Contrescarpe KG en un point K, l'autre la Courtine CD en un point D; & la derniére, la face AB en un point M. Prolongez aussi la Contrescarpe KG, jusqu'à l'angle de l'épaule E. Tirez de l'angle P de la Demi-lune à la Courtine, la perpendiculaire PI (c); & à l'angle flanquant D, la ligne droite PD. Enfin, tirez du point K au point M, la ligne droite KM; & du point M à l'angle de l'épaule E, la ligne droite ME. * Fig. K. (c) E. I. 2. P. 12.

Solution. 1er Dans le triangle PID, on connoît l'angle PID qui est droit [c]; le

(a) N. 180. côté ID (a) qui est la moitié de la Courtine; & le côté PD qui par la construction de l'ouvrage, est égal à la ligne LD, laquelle par la même construction, surpasse de 5 toises la partie BD de la ligne de défense AD. Ainsi, l'on
(b) N. 127. & 123. trouvera (b) l'angle PDI, & la perpendiculaire PI.

2^ent Dans le triangle MDP, on connoît le côté PD; le côté MD qui par la construction de l'ouvrage, surpasse de 3 toises la partie BD de la ligne de défense AD; & l'angle MDP qui est la différence de l'angle BDC à l'angle PDI.
(c) N. 140. Ainsi, l'on trouvera (c) le côté MP, & l'angle DMP.

3^ent Dans le triangle EMD, on connoît le cô-
(d) N. 180. té MD; le côté ED (d); & l'angle MDE (e).
(e) N. 180. (f) N. 140. Ainsi, l'on trouvera (f) le côté ME, & l'angle DME.

4^ent Dans le triangle AMK, on connoît le côté AM qui par la construction de l'ouvrage est plus petit de 3 toises, que la face AB; le côté AK qui par la même construction, est la largeur du fossé; & l'angle KAM qui est le supplément de l'angle flanqué. Ainsi, l'on trouve-
(g) N. 140. ra (g) le côté KM, & l'angle AMK.

5^ent Dans le triangle KEM, on connoît le côté KM, avec le côté ME, & l'angle KME qui est la différence de la somme des angles AMK & DME à celle de deux angles
(h) N. 136. droits. Ainsi, l'on trouvera (h) l'angle MEK.

6^ent Dans le triangle OME, on connoît le

côté ME; l'angle MEK; & l'angle OME qui est la différence de l'angle DME à l'angle DMP. Ainsi, l'on trouvera (a) le côté MO; & par conséquent, la face OP qui est la différence de ce côté au côté MP. (a) N. 119.

7^{ent} Enfin, dans le triangle POG, on connoît le côté OP; l'angle POG qui est égal (b) à la somme des angles intérieurs MEO & OME du triangle OME; & le demi-angle flanqué MPH qui (c) est le supplément des angles DMP & MHP †. Ainsi, l'on trouvera (d) la demi-gorge OG, & la capitale PG. (b) E. l. 1. p. 32. (c) E. l. 1. p. 32. (d) N. 119.

SCHOLIE.

182. *Ce que nous avons dit dans ce dernier Chapitre, suffit pour faire voir la maniére dont il faut résoudre tous les Problêmes qui dépendent de la Trigonométrie-rectiligne. Ainsi, nous finissons ce qui concerne cette Trigonométrie, en avertissant qu'un Géométre ne doit point s'en tenir aux seules méthodes qu'il a lues dans les livres, pour les appliquer indifféremment à tous les cas dans lesquels il peut se trouver : mais qu'il doit réfléchir mûrement à ce qu'il a à faire; & chercher ensuite dans ce qu'il sçait de Géométrie, les moyens les plus sûrs & les plus faciles de l'exécuter.*

† L'angle MHP est connu, puisqu'il est égal (e) à l'angle IHD du triangle-rectangle DIH, dont on connoît l'angle BDC. (e) E. l. 1. p. 15.

Fin du second Livre.

LIVRE TROISIÈME.

De la Trigonométrie-Sphérique.

ON doit remarquer dans la Trigonométrie deux sortes de Principes ; sçavoir, des *Principes generaux*, & des *Principes particuliers*. Nous n'avons point parlé des Principes generaux de la Trigonométrie-rectiligne, parce que ces Principes qui consistent dans les propriétés des angles & des triangles qui sont formés par des lignes droites, se trouvent démontrés dans les Elémens d'Euclide, dont nous supposons que les personnes qui étudient ce Traité sont instruites. Mais comme ces Elémens ne considerent ni les angles, ni les triangles, dont les côtés sont des arcs de cercles, & qui sont cependant ceux dont il s'agit dans la Trigonométrie-Sphérique, nous commencerons par démontrer les propriétés de ces figures ; & nous traiterons ensuite des Principes particuliers, des Problêmes & des Usages de cette derniére Trigonométrie, dans le même ordre que nous avons suivi dans le Livre précedent.

SECTION PREMIERE.

Des Principes géneraux de la Trigonométrie-Sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Cercles de la Sphére.

PROPOSITION I. Théorême.

183. *La section d'une Sphére qui est coupée par un plan, est un cercle.*

La section ADBE * d'une Sphére X qui est coupée par un plan, est un cercle. * Fig. 63. & 64.

Premiérement.

Lorsque le plan coupant passe par le centre de la Sphére.

Constr. Du centre C * de la Sphére X, tirez aux points D, B, E, &c. pris à volonté dans la commune section ADBE de la surface de cette Sphére & du plan qui la coupe, les lignes droites CD, CB, CE, &c. * Fig. 63.

Démonstr. Les lignes CD & CB sont égales (*a*), puisque [c] elles sont tirées du centre C d'une Sphére à des points D & B pris dans sa surface. Or, il en est de même de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point C, à la commune section ADBE de la surface de la Sphére X & du plan qui la coupe. Donc, (a) R. I. 11. d. 13.

puisque [H] la figure ADBE que cette commune section termine est un plan, cette figure
(a) E. l. 1. d. 15. est un cercle (a).

Secondement.

Lorsque le plan coupant ne passe point par le centre de la Sphére.

* Fig. 64. *Constr.* Du centre C * de la Sphére X, abbaissez au plan coupant, la perpendiculaire CF (b). Ensuite, des points D & B pris à
(b) E. l. 1. p. 11. volonté dans la commune section ADBE de la surface de cette Sphére & de ce plan, tirez au point F auquel cette perpendiculaire rencontre ce même plan, & au centre C de cette même Sphére, les lignes droites DF & DC, BF & BC.

Démonstr. Les triangles CFD & CFB sont rectangles l'un & l'autre en F; puisque la ligne CF qui est perpendiculaire [c] au plan qui
(c) E. l. 11. d. 3. coupe la Sphére X, l'est aussi (c) à chacune des lignes FD & FB de ce même plan, avec lesquelles elle a le point F de commun: le côté CF leur est commun: & l'hypoténuse CD du pre-
(d) E. l. 11. d. 13. mier est égale (d) à l'hypoténuse CB du second; puisque [c] ces hypoténuses sont des lignes droites tirées du centre C d'une Sphére à des points D & B pris dans sa surface. Ainsi, le côté FD est
(e) E. l. 1. p. 47. égal (e) au côté F B. Or, on démontre la même chose, & de la même maniére, de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point F à la commune section ADBE de la surface de la Sphére X & du plan qui coupe cette surface.

Donc,

Donc, toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point F à cette commune section, sont égales ; & par conséquent, puisque [H] la figure ADBE que cette commune section termine est un plan, cette figure est un cercle (a). Donc, C. Q. F. D. (a) E. l. 1. d. 15.

COROLLAIRE.

184. Il suit de la démonstration de la premiére partie de ce théorême, que *si un cercle* ADBE * *est la section d'une sphére coupée par un plan qui passe par le centre de cette Sphére, le centre* C *de ce cercle est le même que celui de cette Sphére* : & de la démonstration de la seconde partie, que *si un cercle* ADBE * *est la section d'une Sphére coupée par un plan qui ne passe point par le centre de cette Sphére, le centre* F *de ce cercle est le point auquel la perpendiculaire abbaissée du centre* C *de cette même Sphére à ce plan, rencontre ce même plan.* * Fig. 63. * Fig. 64.

Définition.

185. DANS une Sphére, on appelle *grands cercles*, ceux qui passent par le centre ; & *petits cercles*, ceux qui n'y passent point.

Nous ne considerons que les grands cercles.

PROPOSITION II. Théorême.

186. *Dans une Sphére, les grands cercles se divisent réciproquement en deux parties égales.*

Dans la Sphére X *, les grands cercles AFBG & ADBE se divisent réciproquement en deux parties égales. * Fig. 65.

Démonstr. Puisque [*H*] les cercles AFBG & ADBE sont des grands cercles, ils passent
(*a*) N. 185. chacun par le centre C de la Sphére (*a*); & par conséquent, leur commune section AB y passe
(*b*) N. 184. aussi. Or, (*b*) ce centre est aussi celui de cha-
(*c*) E. l. 11. p. 3. cun de ces cercles; & (*c*) cette commune section est une ligne droite. Donc, cette même commune section est un diamétre de chacun de
(*d*) E. l. 1. d. 17. ces mêmes cercles (*d*). Ainsi, elle les divise l'un & l'autre en deux parties égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

Définition.

187. On appelle *Pôles* d'un cercle, deux points de la surface de la Sphére dont ce cercle est une section, qui sont chacun également éloignés de tous les points de la circonférence de ce même cercle.

* Fig. 65. *Les points* G * *&* F *de la surface de la Sphére* X, *qui sont chacun également éloignés des points* A, D, B, *&c. de la circonférence du cercle* ADBE, *sont les* Pôles *de ce cercle.*

COROLLAIRE I.

188. Il suit de cette définition, que *si dans une Sphére, un arc d'un grand cercle est compris entre l'un des Pôles d'un autre grand cercle & sa circonférence, il sera le quart de la circonférence d'un cercle.*

* Fig. 66. Dans la Sphére X *, l'arc GD qui est compris entre le Pôle G du cercle ADBE & sa circonférence, est le quart de la circonférence d'un cercle.

Constr. Suppofez que l'arc GD eft prolongé, fqu'à ce qu'il ait formé le cercle DGEF.

Démonftr. L'arc DGE eft la moitié de la conférence d'un cercle, puifque les cer-es ADBE & DGEF, qui [*H*] font deux grands rcles, fe divifent réciproquement en deux par-s égales (*a*). Or, l'arc GD eft égal à l'arc GE, (*a*) N. 186. ifque le point G étant [*H*] l'un des Pôles du rcle ADBE, il eft également éloigné de tous points de la circonférence de ce cercle (*b*). (*b*) N. 187. onc, l'arc GD eft la moitié de l'arc DGE; par conféquent, le quart de la circonférence un cercle. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

189. IL fuit de ce Corollaire, que *fi dans e Sphére, la circonférence d'un cercle paffe par s Pôles d'un autre cercle, ce premier cercle fera rpendiculaire à cet autre.*

Dans la Sphére X *, le cercle AGBF dont circonférence paffe par les Pôles G & F du cercle ADBE, eft perpendiculaire à ce dernier cercle. * Fig. 66.

Conftr. Suppofez qu'un grand cercle DGEF paffe auffi par les Pôles G & F du cercle ADBE. Enfuite, du centre C de la Sphére, tirez au Pôle G, & aux points B & D aufquels les circonférences AGBF & DGEF rencontrent celle du cercle ADBE, les lignes droites CG, CB & CD.

Démonftr. Les arcs GB & GD font les mefures, l'un de l'angle GCB, & l'autre de l'an-

gle GCD; puiſque le centre C de la Sphére X,
(a) N. 184. qui [c] eſt le ſommet de ces angles, eſt auſſi (a)
(b) N. 188. le centre de ces arcs. Or (b), ces mêmes arcs ſont chacun le quart de la circonférence d'un cercle; puiſqu'ils ſont compris chacun entre le Pôle G du cercle ADBE & ſa circonférence. Donc, chacun des angles GCB & GCD eſt un angle droit; & par conſéquent la ligne CG eſt perpendiculaire à chacune des lignes CB & CD. Mais, puiſque la ligne CG eſt perpendiculaire à chacune des lignes CB & CD avec leſquelles elle a le point C de commun, elle
(c) E. l. 11. p. 4. l'eſt au plan de ces lignes (c); c'eſt-à-dire, au cercle ADBE. Donc, le cercle AGBF dans lequel elle eſt tirée, eſt auſſi perpendiculaire au
(d) E. l. 11. p. 18. même cercle ADBE (d); & par conſéquent; C. Q. F. D.

PROPOSITION III. Théorême.

190. *Si dans une Sphére, un grand cercle eſt perpendiculaire à un autre, ſa circonférence paſſera par les Pôles de cet autre.*

* Fig. 67. Dans la Sphére X*, la circonférence du cercle AGBF qui eſt perpendiculaire au cercle ADBE, paſſe par les Pôles de ce dernier cercle.

Conſtr. Suppoſez qu'un grand cercle DGEF eſt auſſi perpendiculaire au cercle ADBE. Enſuite, du point G auquel la circonférence de ce premier cercle rencontre celle du cercle AGBF, tirez aux points A & D, les lignes droites GA & GD.

Démonstr. Puisque [*H*] les cercles AGBF & DGEF sont des grands cercles de la Sphére X, leur commune section GF passe par le centre de cette Sphére (*a*); & par une raison pareille, la commune section AB des cercles AGBF & ADBE, y passe aussi. Ainsi, le point C auquel ces communes sections se rencontrent, est le centre de cette Sphére; & par conséquent (*b*), celui du cercle ADBE. Mais, puisque le point C est le centre du cercle ADBE, les triangles GCA & GCD, qui (*c*) sont rectangles l'un & l'autre en C, (car (*d*) les cercles AGBF & DGEF étant perpendiculaires l'un [*H*] & l'autre [*c*] au même cercle ADBE, leur commune section GC lui est aussi perpendiculaire,) & qui ont le côté GC commun, ont encore le côté CA égal au côté CD. Ainsi, l'hypoténuse GA du premier est égale à l'hypoténuse GD du second (*e*); & par conséquent, le point G est également éloigné des points A & D de la circonférence du cercle ADBE. Or, la même démonstration subsiste, par quelque point de la circonférence de ce dernier cercle que passe celle du cercle DGEF. Donc, le point G de la circonférence du cercle AGBF est également éloigné de tous les points de celle du cercle ADBE; & par consequent, puisque ce même point est un point de la surface de la Sphére X, il est (*f*) un des Pôles de ce dernier cercle. Donc, C.Q.F.D.

(*a*) N. 185.
(*b*) N. 184.
(*c*) E. l. 11. d. 2.
(*d*) E. l. 11. p. 19.
(*e*) E. l. 1. p. 6.
(*f*) N. 187.

COROLLAIRE I.

191. IL ſuit de ce théorême, que *ſi dans une Sphére, deux grands cercles ſont perpendiculaires chacun à un même cercle, les points auſquels les circonférences de ces deux cercles ſe coupent, ſeront les Pôles de ce dernier cercle.*

* Fig. 67. Dans la Sphére X *, les points G & F auſquels ſe coupent les circonférences des cercles AGBF & DGEF, qui ſont chacun perpendiculaires au même cercle ADBE, ſont les Pôles de ce dernier cercle.

Démonſtr. Puiſque le cercle AGBF eſt perpendiculaire [H] au cercle ADBE, ſa circon- (a) N. 190. férence paſſe par les Pôles de ce cercle (*a*): & par une raiſon pareille, celle du cercle DGEF y paſſe auſſi. Ainſi, les Pôles du cercle ADBE ſont en même temps dans la circonférence du cercle AGBF & dans celle du cercle DGEF; & par conſéquent, ils ſont des points communs (b) E. l. 3. p. 10. à ces deux circonférences. Or (*b*), ces deux circonférences n'ont de points communs que les points G & F auſquels elles ſe coupent. Donc les points G & F ſont les Pôles du cercle ADBE; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

192. IL ſuit auſſi de ce théorême, que *ſi dans une Sphére, un arc d'un grand cercle qui eſt perpendiculaire à un autre, eſt le quart de la circonférence d'un cercle, l'extrémité de cet arc ſera l'un des Pôles de cet autre cercle.*

* Fig. 67. Dans la Sphére X *, l'extrémité G de l'arc

AG, qui eſt le quart de la circonférence du grand cercle AGBF perpendiculaire au cercle ADBE, eſt l'un des Pôles de ce dernier cercle.

Démonſtr. Les Pôles du cercle ADBE ſont (*a*) dans la circonférence du cercle AGBF; puiſque [*H*] le dernier de ces deux cercles eſt perpendiculaire au premier : & ces mêmes Pôles ſont également éloignés des points A & B de la circonférence du cercle ADBE; puiſque (*b*) les Pôles d'un cercle ſont également éloignés de tous les points de ſa circonférence. Or, l'extrémité G de l'arc AG eſt le ſeul point de la partie AGB de la circonférence du cercle AGBF, qui ſoit également éloigné des points A & B, de la circonférence du cercle ADBE; puiſque (*c*) cette partie eſt la moitié de la circonférence du cercle AGBF dont l'arc AG eſt un quart [*H*], & dont par conſéquent l'arc GB eſt un autre quart. Donc, l'extrêmité G de l'arc AG eſt l'un des Pôles du cercle ADBE; & par conſéquent, C. Q. F. D.

(*a*) N. 190.
(*b*) N. 187.
(*c*) N. 186.

COROLLAIRE III.

193. IL ſuit enfin de ce même théorême, que *ſi dans une Sphére, deux arcs de grands cercles, qui ſont tirés d'un même point, ſont chacun le quart de la circonférence d'un cercle, ce point ſera l'un des Pôles du cercle qui paſſera par l'autre extrémité de ces arcs.*

Dans la Sphére X *, le point G duquel on a tiré les arcs GA & GD qui ſont chacun le

* Fig. 67.

quart de la circonférence d'un cercle, est l'un des Pôles du cercle ADBE qui passe par les extrémités A & D de ces arcs.

Constr. Du centre C de la Sphére X, tirez aux points A, D & G, les lignes droites CA, CD & CG.

Démonstr. Les arcs GA & GD sont les mesures, l'un de l'angle GCA, & l'autre de l'angle GCD; puisque le centre C de la Sphére X, qui [c] est
(a) N. 184. le sommet de ces angles, est aussi (*a*) le centre de ces arcs : & [*H*] ces mêmes arcs sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Ainsi, la ligne CG est perpendiculaire à chacune des lignes CA & CD avec lesquelles elle a le point C de commun; & par conséquent,
(b) E. l. 11. p. 4. elle l'est au plan de ces lignes (*b*), c'est-à-dire, au cercle ADBE. Or, puisque la ligne CG est perpendiculaire au cercle ADBE, & qu'elle passe par le centre C de ce cercle, on démontrera de la même maniére dont on l'a fait dans
(c) N. 190. ce théorême (*c*), que son extrémité G est également éloignée de tous les points de la circonférence de ce cercle; & par conséquent, que le point G est l'un des Pôles de ce même
(d) N. 187. cercle (*d*). Donc, C. Q. F. D.



CHAPITRE II.

CHAPITRE II.

Des angles qui sont formés par les circonférences des cercles de la Sphére.

THEORESME.

194. *LEs angles qui sont formés sur la surface d'une Sphére par des arcs de cercles, sont égaux aux angles que les plans de ces arcs forment entr'eux.*

L'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphére X, est égal à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD de ces arcs. * Fig. 68.

Constr. Du point B élevez (a) au diamétre commun BD des cercles BADF & BCDE, les perpendiculaires GH & IK, l'une dans le plan du premier, & l'autre dans le plan du dernier. (a) E. l. 1. p. 11.

Démonstr. La ligne BG & l'arc BA sont [c] l'une & l'autre dans un même plan, & perpendiculaires au même diamétre BD. Or, il en est de même [c] de la ligne BK & de l'arc BC; & [c] le point B est commun à ces lignes & à ces arcs. Ainsi, l'ouverture GBK de ces lignes est égale à l'ouverture ABC de ces arcs. Mais (b), cette ouverture GBK est aussi égale à celle des plans BAD & BCD de ces mêmes arcs; puisque [c] les lignes BG & BK sont des perpendiculaires à la commune section BD de ces (b) E. l. 11. d. 5.

plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc l'ouverture ABC des arcs BA & BC est égale à celle des plans BAD & BCD de ces arcs; & par conséquent, puisque (a) ces ouvertures sont des angles, l'angle ABC formé par les arcs BA & BC, est égal à l'angle formé par les plans BAD & BCD de ces arcs. Donc, C. Q. F. D.

(a) E. l. 1. d. 8.

COROLLAIRE I.

195. IL suit de ce théorême, 1ent que *si un angle qui est formé sur la surface d'une Sphère par deux arcs de cercles, est un angle droit, les plans de ces arcs seront perpendiculaires l'un à l'autre :* 2ent que *si cet angle est aigu, il sera égal à l'inclinaison de ces plans :* 3ent enfin, que *si ce même angle est obtus, il sera égal au supplément de l'inclinaison de ces mêmes plans.*

Premiérement.

* Fig. 69. Si l'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphére X, est un angle droit, les plans BAD & BCD de ces arcs sont perpendiculaires l'un à l'autre.

(b) N. 194. *Constr.* La même que la précédente (*b*).

Démonstr. L'angle ABC est égal [c] à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC : & l'angle qui est formé par ces plans, est égal (*c*) à l'angle GBK; puisque les lignes BG & BK sont [c] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans

(c) N. 194.

l'autre, du même point B de cette commune section Donc, l'angle ABC est égal à l'angle GBK; & par conséquent, puisque le premier est droit [H], le dernier l'est aussi. Or, puisque l'angle GBK est droit, la ligne BK qui est perpendiculaire [c] à la ligne BD, l'est aussi à la ligne BG. Ainsi, elle est perpendiculaire au plan BAD de ces lignes (*a*); & par conséquent, le plan BCD dans lequel elle est, lui est aussi perpendiculaire (*b*). Donc, C.Q.F. 1° D.

(*a*) E. l. 11. p. 4.

(*b*) E. l. 11. p. 18.

Secondement.

Si l'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphére X, est un angle aigu, il est égal à l'inclinaison du plan BCD au plan BAD.

* Fig. 70.

Constr. La même que la précédente (*c*).

(*c*) N. 194.

Démonstr. On démontre de la même maniére dont on vient de le faire dans la premiére partie de ce corollaire, que l'angle ABC est égal à l'angle GBK. Ainsi, puisque [*H*] le premier est aigu, le dernier l'est aussi. Mais, puisque l'angle GBK est aigu, & que les lignes BG & BK qui le forment, sont [c] des perpendiculaires à la commune section BD des plans BAD & BCD, qui sont tirées, l'une dans l'un de ces plans & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section, cet angle est l'inclinaison du plan BCD au plan BAD (*d*). Donc, l'angle ABC est égal à l'inclinaison de ces deux plans; & par conséquent, C.Q.F. 2° D.

(*d*) E. l. 11. d. 5.

Troisiémement.

* Fig. 68. Enfin, si l'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphére X, est un angle obtus, il est égal au supplément de l'inclinaison du plan BCD au plan BADF.

(a) N. 194. *Constr.* La même que la précédente (*a*).

Démonstr. On démontre encore de la même maniére dont on l'a fait dans la premiére partie de ce même corollaire; que l'angle ABC est égal à l'angle GBK. Ainsi, puisque [H] le premier est obtus, le dernier l'est aussi; & puisque (*b*) le dernier est le supplément de l'angle KBH, l'angle ABC est égal au supplément de l'angle KBH. Mais (*c*), l'angle KBH est l'inclinaison du plan BCD de l'arc BC, au plan BADF de l'arc BA. Car, il est aigu, puisque l'angle GBK est obtus [D]; & les lignes BK & BH qui le forment, sont [C] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal au supplément de l'inclinaison du plan BCD au plan BADF; & par conséquent, C. Q. F. 3° D.

(b) N. 6. †.

(c) E. l. 11. d. 5.

COROLLAIRE II.

196. IL suit aussi de ce ce théorême, que *si deux arcs qui forment un angle sur la surface d'une Sphére, sont chacun le quart de la circonférence d'un grand cercle, l'arc du grand cercle, qui sera intérieur à cet angle, & compris entre les points ausquels ces quarts de circonfé-*

rences se terminent, sera la mesure de ce même angle.

Si les arcs BA * & BC qui forment l'angle ABC sur la surface de la Sphére X, sont chacun le quart de la circonférence d'un grand cercle, l'arc AC du grand cercle EACF, (lequel arc est intérieur à cet angle ABC, & compris entre les points A & C ausquels ces quarts de circonférences se terminent,) sera la mesure de ce même angle. * Fig. 71.

Constr. Du centre G de la Sphére X tirez aux points A & C, les rayons GA & GC.

Démonstr. L'angle ABC est égal (*a*) à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC. Or, l'angle qui est formé par ces plans est égal à l'angle AGC (*b*). Car, puisque les arcs BA & BC sont chacun [H] le quart de la circonférence d'un cercle, chaque angle BGA & BGC est un angle droit; & par conséquent, les lignes GA & GC qui [C] sont tirées, l'une dans le plan BAD & l'autre dans le plan BCD, du même point G de la commune section BD de ces plans, sont perpendiculaires à cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle AGC. Mais, l'arc AC est la mesure de l'angle AGC; puisque cet arc étant [H] un arc d'un grand cercle de la Sphére X, il a pour centre (*c*) le centre G de cette Sphére, qui [C] est le sommet de cet angle AGC. Donc, l'arc AC est la mesure de l'angle ABC; & par conséquent, C. Q. F. D.

(*a*) N. 194.
(*b*) E. l. 11. d. 5.
(*c*) N. 184.

COROLLAIRE III.

197. Il suit de ce corollaire, que *les angles opposés qui sont formés sur la surface d'une Sphére par les moitiés des circonférences de deux grands cercles, sont égaux.*

* Fig. 71. Les angles opposés ABC * & ADC, qui sont formés sur la surface de la Sphére X par les moitiés BAD & BCD des circonférences des deux grands cercles BADH & BCDI, sont égaux.

Constr. Divisez la circonférence du demi-

(a) E. l. 3. cercle BAD en deux parties égales BA & DA (*a*).

p. 30. Divisez aussi la circonférence du demi-cer-

(b) E. l. 3. cle BCD en deux parties égales BC & DC (*b*).

p. 30. Par les points A & C, faites passer l'arc AC d'un grand cercle.

Démonstr. Les arcs BA & BC sont chacun [c] le quart de la circonférence d'un grand cercle; puisque [H] les arcs BAD & BCD sont chacun la moitié de la circonférence d'un grand cercle. Ainsi, l'arc AC est la mesure de l'an-

(c) N. 196. gle ABC (*c*). Or, le même arc AC est aussi la me-

(d) N. 196. sure de l'angle ADC (*d*); puisque les arcs DA & DC sont aussi chacun [c] le quart de la circonférence d'un grand cercle. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle ADC; & par conséquent, C. Q. F. D.

(e) N. 194. *Autre Démonstr.* L'angle ABC est égal (*e*) à l'angle qui est formé par les plans des arcs BA

(f) N. 194. & BC : & l'angle ADC est égal (*f*) à l'angle q uest formé par les plans des arcs DA & DC.

Or, les plans des arcs BA & BC, & ceux des arcs DA & DC, ſont les mêmes; puiſque [H] les arcs BA & DA ſont la circonférence du même demi-cercle BAD, & que les arcs BC & DC ſont celle du même demi-cercle BCD. Donc, l'angle ABC eſt égal à l'angle ADC; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

198. IL ſuit encore du même théorême (a), que *la ſomme des angles de ſuite qui ſont formés ſur la ſurface d'une Sphére par deux arcs de cercles, eſt égale à celle de deux angles droits.* (a) N. 194.

La ſomme des angles de ſuite ABC * & CBF, que les arcs ABF & BC, forment ſur la ſurface de la Sphére X, eſt égale à celle de deux angles droits. * Fig. 70.

Conſtr. La même que celle du No 194.

Démonſtr. L'angle ABC eſt égal (b) à l'angle qui eſt formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC: & l'angle CBF eſt égal (c) à l'angle qui eſt formé par les plans BCD & BFD des arcs BC & BF. Or, l'angle qui eſt formé par les plans BAD & BCD eſt égal à l'angle GBK (d); puiſque les lignes BG & BK ſont des perpendiculaires à la commune ſection BD de ces plans, qui ſont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune ſection: & l'angle qui eſt formé par les plans BCD & BFD eſt égal à l'angle KBH (e); puiſque les lignes BK & BH

(b) N. 194.
(c) N. 194.
(d) E. l. 11. d. 5.
(e) E. l. 11. d. 5.

ſont pareillement [c] des perpendiculaires à la commune ſection BD de ces plans, qui ſont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune ſection. Donc, l'angle ABC eſt égal à l'angle GBK, l'angle CBF à l'angle KBH; & par conſéquent, puiſque la ſomme des angles GBK & KBH qui ſont des angles de ſuite, eſt égale à celle de deux angles droits (a), la ſomme des angles ABC & CBF lui eſt auſſi égale. Donc, C. Q. F. D.

(a) E. l. 1. p. 13.

Corollaire V.

199. Il ſuit enfin de ce même théorême (b), que *les angles oppoſés au ſommet, qui ſont formés ſur la ſurface d'une Sphére par deux arcs de cercles, ſont égaux.*

(b) N. 194.

Les angles ABC * & FBE qui ſont oppoſés au ſommet, & formés ſur la ſurface de la Sphére X par les arcs ABF & CBE, ſont égaux.

* Fig. 70.

Conſtr. La même que celle du N° 194.

Démonſtr. L'angle ABC eſt égal (c) à l'angle qui eſt formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC: & l'angle FBE eſt égal (d) à l'angle qui eſt formé par les plans BFD & BED des arcs BF & BE. Or, l'angle qui eſt formé par les plans BAD & BCD, eſt égal à l'angle GBK (e); puiſque les lignes BG & BK ſont [c] des perpendiculaires à la commune ſection BD de ces plans, qui ſont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune ſection: & l'angle qui eſt formé par les plans BFD & BED, eſt égal

(c) N. 194.

(d) N. 194.

(e) E. l. 11. d. 5.

égal (*a*) à l'angle HBI ; puiſque les lignes BH (a) E. l. 11. d. 5.
& BI ſont auſſi [c] des perpendiculaires à la commune ſection BD de ces plans, qui ſont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune ſection. Donc, l'angle ABC eſt égal à l'angle GBK, l'angle FBE à l'angle HBI ; & par conſéquent, puiſque les angles GBK & HBI qui ſont oppoſés au ſommet, ſont égaux (*b*), les angles ABC (b) E. l. 1.
& FBE ſont auſſi égaux. Donc, C. Q. F. D. p 15.

CHAPITRE III.

Des Triangles qui ſont formés par les circonférences des cercles de la Sphére.

DE'FINITIONS.

200. ON appelle *Triangle-Sphérique*, un triangle qui eſt formé ſur la ſurface d'une Sphére, par les arcs de trois grands cercles de cette Sphére.

Le triangle ABC * *qui eſt formé ſur la ſurface de la Sphére* X *par les arcs* AB, AC *&* CB *des trois grands cercles* FABK, DACE *&* IBCH, *eſt un* Triangle-Sphérique. * Fig. 71.

201. Les *côtés* d'un triangle Sphérique, ſont les arcs qui forment ce triangle.

Les côtés *du triangle-Sphérique* ABC * *ſont les arcs* AB AC & CB *qui le forment.* * Fig. 72.

202. Les *angles* d'un triangle-Sphérique

sont les angles qui sont formés par les côtés de ce triangle.

Fig. 72. *Les angles du triangle-Sphérique* ABC *sont*, 1° *l'angle* BAC, *qui est formé par les arcs* AB & AC : 2° *l'angle* ABC, *qui est formé par les arcs* BA & BC : 3° *l'angle* ACB, *qui est formé par les arcs* CA & CB.

203. On tire la dénomination des triangles-Sphériques, ou de leurs côtés, ou de leurs angles. Or, lorsque l'on tire de ses côtés la dénomination d'un triangle-Sphérique, on nomme *Triangle-équilateral*, celui dont tous les côtés sont égaux : *Triangle-isoscele*, celui qui n'a que deux de ses côtés égaux : *Triangle-scalêne*, celui dont tous les côtés sont inégaux : & *Triangle-quadrantal*, celui dont quelque côté est le quart de la circonférence d'un cercle.

Et lorsque l'on tire de ses angles la dénomination d'un triangle-Sphérique, on appelle *Triangle-rectangle*, celui dont un des angles est droit : *Triangle-obtusangle*, celui dont un des angles est obtus : *Triangle-acutangle*, celui dont tous les angles sont aigus : & en géneral, *Triangle-obliquangle*, celui qui n'a aucun angle droit.

PROPOSITION I. Théorême.

204. *Si trois grands cercles ont chacun pour Pôle le sommet de l'un des angles d'un triangle-Sphérique quelconque décrit sur la surface d'une Sphére, les circonférences de ces cercles formeront sur cette même surface d'autres triangles,*

dont les sommets des angles seront réciproquement les Pôles des cercles dont les circonférences forment le premier, chacun de chacun.

Les circonférences des cercles HDLF*, HEMK & OEDI qui ont pour Pôles, l'un le sommet de l'angle A du triangle-Sphérique ABC décrit sur la surface de la Sphére X, l'autre le sommet de l'angle B, & le dernier le sommet de l'angle C, forment sur la même surface d'autres triangles, (par exemple le triangle DEF,) dont les sommets des angles, (par exemple D, E & F,) sont réciproquement les Pôles des cercles OACL, BCNI & BAMK, dont les circonférences forment le triangle ABC, chacun de chacun. * Fig. 73.

Démonstr. Si l'on suppose qu'un arc d'un grand cercle, est tiré du point D au point C, cet arc sera (*a*) le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [*H*] le point C est l'un des Pôles du cercle OEDI: & il en seroit de même (*b*) de l'arc d'un autre grand cercle, qui seroit tiré du même point D au point A; puisque [*H*] le point A est l'un des Pôles du cercle HDLF. Ainsi (*c*), le point D est l'un des Pôles du cercle OACL. Pareillement, si l'on suppose qu'un arc d'un grand cercle est tiré du point E au point C, cet arc sera (*d*) le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [*H*] le point C est l'un des Pôles du cercle OEDI: & il en seroit de même (*e*) de l'arc d'un autre grand cercle qui seroit tiré du même point E au point B,

(*a*) N. 188.
(*b*) N. 188.
(*c*) N. 193.
(*d*) N. 188.
(*e*) N. 188.

puisque [H] le point B est l'un des Pôles du
(a) N. 193. cercle HEMF. Ainsi (a), le point E est l'un des Pôles du cercle BCNI. Enfin, si l'on suppose qu'un arc d'un grand cercle est tiré du point F
(b) N. 188. au point A, cet arc sera (b) le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [H] le point A est l'un des Pôles du cercle HDLF : & il en
(c) N. 188. seroit de même (c) de l'arc d'un autre grand cercle qui seroit tiré du même point F au point B; puisque [H] le point B est l'un des
(d) N. 193. Pôles du cercle HEMF. Ainsi (d), le point F est l'un des Pôles du cercle BAMK. Or, ces points D, E & F sont les sommets des angles du triangle DEF, qui est formé par les circonférences des cercles HDLF, HEMF & OEDI dont les Pôles sont [H] les sommets des angles A, B & C du triangle ABC : & les cercles OACL, BCNI & BAMK sont ceux dont les circonférences forment ce triangle ABC. Donc, les sommets des angles du triangle DEF sont les Pôles des cercles dont les circonférences forment le triangle ABC; & par consequent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

205. Il suit de ce théorême, que *si les cercles dont les circonférences forment un triangle sur la surface d'une Sphére, ont chacun pour Pôle le sommet de l'un des angles d'un autre triangle-Sphérique quelconque décrit sur la même surface ; les côtés de ce premier triangle seront les mesures, l'un de l'un des angles, l'autre d'un au-*

tre angle, & le troisiéme du supplément du troisiéme angle de cet autre triangle.

Les côtés DF *, DE & EF du triangle DEF qui est formé sur la surface de la Sphére X par les circonférences des cercles HDLF, OEDI & HEMF, dont les Pôles sont les sommets A, C & B des angles du triangle-Sphérique ABC décrit sur la même surface, sont les mesures, l'un de l'angle BAC de ce dernier triangle, l'autre de l'angle BCA, & le troisiéme, du supplément de l'angle ABC. * Fig. 73.

Démonstr. L'arc HDK est le quart de la circonférence d'un cercle (*a*); puisque le point F étant (*b*) l'un des Pôles du cercle BAMK, le point H qui est diamétralement opposé à ce point F, est l'autre Pôle de ce même cercle: & l'arc DKL est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*c*), puisque (*d*) le point D est l'un des Pôles du cercle OACL. Ainsi, si de chacun de ces arcs on retranche l'arc DK qui leur est commun, les restes qui sont les arcs HD & KL, seront égaux. Mais (*e*), l'arc KL est la mesure de l'angle KAL; puisque le point A étant [*H*] l'un des Pôles du cercle HDLF, les arcs AMK & ACL sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (*f*). Donc, l'arc HD est aussi la mesure de l'angle KAL; & par consequent, puisque (*g*) l'angle BAC est le supplément de cet angle, & que (*h*) le côté DF est le supplément de cet arc, le côté DF est la mesure de l'angle BAC. Pareillement, l'arc DEO est le

(*a*) N. 188.
(*b*) N. 204.
(*c*) N. 188.
(*d*) N. 204.
(*e*) N. 196.
(*f*) N. 188.
(*g*) N. 198.
(*h*) N. 6. †

(a) N. 188. quart de la circonférence d'un cercle (*a*), puisque (*b*) le point D est l'un des Pôles du cercle OACL : & l'arc EOG est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*c*), puisque (*d*) le point E est l'un des Pôles du cercle GBNI. Ainsi, si de chacun de ces arcs on retranche l'arc EO qui leur est commun, les restes qui sont le côté DE & l'arc OG, seront égaux. Mais (*e*), l'arc OG est la mesure de l'angle BCA; puisque le point C étant [H] l'un des Pôles du cercle OEDI, les arcs CAO & CBG sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (*f*). Donc, le côté DE est aussi la mesure de l'angle BCA. Enfin, l'arc HEM est le quart de la circonférence d'un cercle (*g*), puisque [D] le point H est l'un des Pôles du cercle BAMK : & l'arc EMN est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*h*), puisque (*i*) le point E est l'un des Pôles du cercle BCNI. Ainsi, si de chacun de ces arcs on retranche l'arc EM qui leur est commun, les restes qui sont les arcs HE & MN, seront égaux. Mais (*k*) l'arc MN est la mesure de l'angle ABC; puisque le point B étant [H] l'un des Pôles du cercle HEMF, les arcs BAM & BCN sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (*l*). Donc, l'arc HE est aussi la mesure de l'angle ABC; & par conséquent, puisque (*m*) le côté EF est le supplément de cet arc, il est la mesure du supplément de cet angle. Donc, C. Q. F. D.

(b) N. 204.
(c) N. 188.
(d) N. 204.
(e) N. 196.
(f) N. 188.
(g) N. 188.
(h) N. 188.
(i) N. 204.
(k) N. 196.
(l) N. 188.
(m) N. 6. †.

SCHOLIE.

206. *Ce que l'on vient de démontrer du triangle* DEF * *est vrai aussi de chacun des autres triangles que les circonférences des mêmes cercles* HDLF, HEMF & OEDI, *forment sur la surface de la Sphère* X. *Ainsi, les sommets* H, E *&* D *des angles du triangle* HED, *sont aussi les Pôles des cercles* BAMK, BCNI *&* OACL : *& ses côtés* HE, ED & HD, *sont les mesures, l'un de l'angle* ABC *du triangle* ABC, *l'autre de l'angle* BCA, *& le troisiéme, du supplément de l'angle* BAC ; *comme il est facile de s'en convaincre par des démonstrations pareilles à celles de ce théorême & de son corollaire.* * Fig. 73.

PROPOSITION II. Théorême.

207. *Dans un triangle-Sphérique quelconque, les trois angles pris ensemble valent plus de deux angles droits, & moins de six.*

Dans le triangle-Sphérique AHBICKA *, les trois angles HAK, HBI & KCI pris ensemble, valent plus de deux angles droits, & moins de six. * Fig. 74.

Constr. Tirez du point A aux points B & C, les lignes droites AB & AC; & du point B au point C, la ligne droite BC. Du point D pris à volonté dans la commune section BG des plans des arcs BHA & BIC, élevez à cette commune section (*a*), l'une dans l'un de ces plans & l'autre dans l'autre, les perpendiculaires DE & DF, qui rencontrent en des points E & F, les côtés BA & BC du triangle-rectiligne ABC, (*a*) 2. l. 1. p. 11.

prolongés s'il eſt néceſſaire. Enfin, tirez du point E au point F, la ligne droite EF.

Démonſtr. Premiérement, l'angle HBI eſt égal (*a*) à l'angle qui eſt formé par les plans BGA & BGC des arcs BHA & BIC : & l'angle qui eſt formé par ces plans eſt égal (*b*) à l'angle EDF ; puiſque les lignes DE & DF ſont [c] des perpendiculaires à la commune ſection BG de ces plans, qui ſont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point D de cette commune ſection. Donc, l'angle HBI eſt égal à l'angle EDF. Mais, dans les triangles-rectilignes EDF & EBF qui ont le côté EF commun, les côtés DE & DF ſont plus petits (*c*) que les côtés BE & BF ; puiſque [c] les triangles BDE & BDF ſont rectangles l'un & l'autre en D. Donc (*d*), l'angle EDF eſt plus grand que l'angle EBF ou ABC ; & par conſéquent, l'angle HBI eſt plus grand que l'angle ABC. Or, on démontre de la même maniére, que l'angle HAK eſt plus grand que l'angle BAC ; & que l'angle KCI eſt plus grand que l'angle ACB. Donc, les trois angles HBI, HAK & KCI pris enſemble, valent plus que les trois angles ABC, BAC & ACB pris enſemble ; & par conſéquent, puiſque (*e*) les trois derniers, pris enſemble, ne valent que deux angles droits, les trois premiers, pris enſemble, valent plus de deux angles droits. Donc, C. Q. F. 1° D.

(*a*) N. 194.
(*b*) E. l. 11. d. 5.
(*c*) E. l. 1. p. 19.
(*d*) E. l. 1. p. 21.
(*e*) E. l. 1. p. 32.

Secondement, l'angle intérieur KCI étant pris

pris avec l'angle extérieur ICM, vaut deux angles droits (a), puisque ces deux angles sont de suite. Or, il en est de même de l'angle HAK pris avec l'angle HAL; & de l'angle HBI pris avec l'angle HBN. Donc, les angles tant intérieurs qu'extérieurs du triangle-sphérique AHBICKA pris ensemble, valent six angles droits; & par conséquent, les intérieurs seuls pris ensemble, valent moins de six angles droits. Donc, C. Q. F. 2° D.

(a) N. 198.

COROLLAIRE.

208. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle-sphérique quelconque, chaque angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui lui sont opposés.*

Dans le triangle-Sphérique AHBICKA*, l'angle extérieur ICM est plus petit que la somme des angles intérieurs HAK & HBI qui lui sont opposés.

* Fig. 74.

Démonstr. L'angle KCI pris avec l'angle ICM vaut deux angles droits (b), puisque ces deux angles sont de suite. Or (c), le même angle KCI pris avec les angles HAK & HBI, vaut plus de deux angles droits. Donc, l'angle ICM est plus petit que les angles HAK & HBI pris ensemble; & par conséquent, C. Q. F. D.

(b) N. 198.
(c) N. 207.

PROPOSITION III. Théorême.

209. *Dans un triangle-Sphérique quelconque, deux côtés pris ensemble, valent plus que le troi-*

sieme ; & les trois côtés pris ensemble, valent moins que la circonférence d'un cercle.

Fig. 75. Dans le triangle-Sphérique ABC, les deux côtés, par exemple AB & BC pris ensemble, valent plus que le côté AC: & les trois côtés AB, BC & AC pris ensemble, valent moins que la circonférence d'un cercle.

Constr. Du centre G de la Sphére X, tirez aux sommets des angles A, B & C, les rayons GA, GB & GC.

Démonstr. L'arc AB est la mesure de l'angle AGB ; puisqu'étant (*a*) un arc d'un grand cercle de la Sphére X, il a pour centre (*b*) le centre G de cette Sphére, qui est [c] le sommet de cet angle. Par des raisons pareilles, l'arc BC est la mesure de l'angle BGC; & l'arc AC est celle de l'angle AGC. Or, ces trois angles forment ensemble au centre G de cette même Sphére, un angle solide G. Donc *premiérement* (*c*), les deux premiers AGB & BGC pris ensemble, valent plus que le troisiéme AGC ; & par conséquent, les arcs AB & BC pris ensemble, valent plus que l'arc AC. *Secondement* (*d*), les trois AGB, BGC & AGC pris ensemble, valent moins que quatre angles droits; & par conséquent, les arcs AB, BC & AC pris ensemble, valent moins que la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

(*a*) N. 200. (*b*) N. 184. (*c*) E. l. 11. p. 20. (*d*) E. l. 11. p. 21.

COROLLAIRE.

210. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique quelconque, chaque côté est*

plus petit que la moitié de la circonférence d'un cercle.

Dans le triangle-Sphérique ABC*, chaque côté AB, AC & BC est plus petit que la moitié de la circonférence d'un cercle. * Fig. 75.

Démonstr. Si le côté AB étoit la moitié de la circonférence d'un cercle, ou plus de cette moitié, les côtés AB, AC & BC pris ensemble, vaudroient plus de la circonférence d'un cercle; puisque (a) les côtés AC & BC pris ensemble, valent plus que le côté AB. Mais (b), les côtés AB, AC & BC pris ensemble, ne valent pas plus de la circonférence d'un cercle. Donc, le côté AB n'est ni la moitié de la circonférence d'un cercle, ni plus de cette moitié; & par conséquent, puisque la même chose se démontre de la même maniére, & du côté AC, & du côté BC, chaque côté AB, AC & BC est plus petit que la moitié de la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

(a) N. 209. (b) N. 209.

PROPOSITION IV. Théorême.

211. *Si deux triangles-Sphériques décrits sur des Sphéres égales, ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun, ils seront entiérement égaux.*

Si dans les triangles Sphériques ABC* & DEF, l'angle A est égal à l'angle EDF; & si les côtés AB & AC qui forment cet angle A, sont égaux aux côtés DE & DF qui forment cet angle EDF, * Fig. 76.

chacun à chacun, ces deux triangles seront entiérement égaux.

Les côtés AB, AC, DE *&* DF *sont semblablement posés, ou différemment posés. Or :*

212. Premiérement, *Lorsque les côtés* AB, AC, DE & DF *sont semblablement posés.*

Constr. Posez le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniére que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonstr. Le sommet de l'angle A est [c] sur le sommet de l'angle EDF, & le côté AC sur le côté DF; donc, puisque [H] l'angle A est égal à l'angle EDF, l'autre côté AB est sur l'autre côté DE. Ainsi, le côté AC qui [H] est égal au côté DF, est posé [c] sur ce côté DF; & l'extrémité A de l'un est [c] sur l'extrémité D de l'autre : donc, l'autre extrémité C du premier est sur l'autre extrémité F du second. † Pareillement, le côté AB qui [H] est égal au côté DE, est posé [D] sur ce côté DE; & l'extrémité A de l'un est [c] sur l'extrémité D de l'autre: donc, l'autre extrémité B du premier est sur l'autre extrémité E du second. Ainsi, les sommets A, C & B des angles du triangle ABC sont sur les sommets D, F & E des angles du triangle DEF, chacun sur chacun; & par conséquent, le triangle ABC est entiérement égal au triangle DEF.

213. Secondement, *Lorsque les côtés* ab, ac, DE *&* DF *sont différemment posés.*

Constr. Tirez par les sommets D, E & F des

† Il faut faire attention à ce que [c] ces côtés AB, AC, DE, DF, &c. auront aussi le même point G pour centre.

angles du triangle DEF, & par le centre G de la Sphére sur la surface de laquelle ce triangle est décrit, les diamétres DH, EI & FK.

Démonstr. 1[ent] L'angle *a* est égal [H] à l'angle EDF; l'angle EDF est égal (*a*) à l'angle EHF, (*a*) N. 197.
puisque (*b*) les arcs DFH & DEH sont chacun (*b*) N. 186.
la moitié de la circonférence d'un grand cercle; & l'angle EHF est égal (*c*) à l'angle IHK (*c*) N. 199.
qui lui est opposé au sommet : donc l'angle *a* est égal à l'angle IHK. 2[ent] Les arcs *ab* & *ac* sont égaux aux arcs HI & HK, chacun à chacun; puisque [H] l'arc *ab* est égal à l'arc DE, l'arc *ac* à l'arc DF, & que les angles DGE & HGI étant [c] opposés au sommet, de même que les angles DGF & HGK, l'arc DE est égal (*d*) à l'arc HI, & l'arc DF à l'arc HK. (*d*) E. l. 1. p. 15.

Ainsi, dans les triangles *abc* & HIK, l'angle *a* est égal à l'angle IHK; & les côtés *ab* & *ac* qui forment cet angle *a*, sont égaux aux côtés HI & HK qui forment cet angle IHK, chacun à chacun. Donc, puisque ces côtés sont semblablement posés, ces deux triangles sont entiérement égaux (*e*). Mais, on démontre que le (*e*) N. 212.
côté IK du triangle HIK, est égal au côté EF du triangle DEF, de la même maniére dont on vient de démontrer que le côté HI est égal au côté DE, & le côté HK au côté DF. On démontre aussi, que l'angle HIK est égal à l'angle DEF, & l'angle HKI à l'angle DFE, de la même maniére dont on vient de démontrer que l'angle IHK est égal à l'angle EDF. Donc, le trian-

gle HIK est entiérement égal au triangle DEF; & par conséquent, le triangle *abc* est aussi entiérement égal au même triangle DEF. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

214. Il suit de ce théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, deux côtés sont égaux, les angles qui sont opposés à ces côtés, seront aussi égaux.*

* Fig. 77. Si dans le triangle-Sphérique ABC*, les côtés BA & BC sont égaux, les angles C & A le seront aussi.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle, divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD.

Démonstr. L'angle CBD est égal [C] à l'angle ABD, le côté BC est égal [H] au côté BA, & le côté BD est commun. Donc, les triangles CBD & ABD sont entiérement égaux (*a*);
(*a*) N. 211.
& par conséquent, l'angle C est égal à l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

215. Il suit de ce Corollaire, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, tous les côtés sont égaux, tous les angles le seront aussi.*

COROLLAIRE III.

216. Il suit aussi de ce même théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, deux angles sont égaux, les côtés qui sont opposés à ces angles, seront aussi égaux.*

* Fig. 78. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, les an-

gles C & A sont égaux, les côtés BA & BC le seront aussi.

Constr. Prolongez le côté BC indéfiniment vers E. Supposez ensuite que deux arcs AD & AE de deux grands cercles, passent par le sommet de l'angle A, & rencontrent l'arc CE en des points D & E pris à volonté, l'un au dessous du point B, & l'autre au dessus.

Démonstr. Si le côté BA n'étoit point égal au côté BC, il seroit égal à un arc plus grand, ou plus petit que ce côté. Or, si le côté BA étoit égal à un arc, par exemple EC, plus grand que le côté BC, les triangles BAC & ACE qui [*H*] ont l'angle A égal à l'angle C, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BA égal [*H*] au côté CE; ainsi (*a*), ils seroient entiérement égaux. Pareillement, si le côté BA (a) N. 212. étoit égal à un arc, par exemple CD, plus petit que le côté BC, les triangles BAC & ACD qui [*H*] ont l'angle A égal à l'angle C, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BA égal [*H*] au côté CD; ainsi (*b*), ils seroient (b) N. 212. aussi entiérement égaux. Mais, le triangle BAC n'est entiérement égal ni au triangle ACE, ni au triangle ACD; puisqu'il est plus petit que le premier, & plus grand que le dernier. Donc, le côté BA n'est égal ni à un arc plus grand, ni à un arc plus petit que le côté BC; & par conséquent, il est égal au côté BC. Donc, C.Q.F.D.

COROLLAIRE IV.

217. ENFIN, il suit de ce Corollaire, que *si*

dans un triangle-Sphérique quelconque, tous les angles sont égaux, tous les côtés le seront aussi.

PROPOSITION V. Théorême.

218. *Si dans un triangle-Sphérique quelconque, un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.*

* Fig. 79. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, l'angle A est plus grand que l'angle C, le côté BC sera plus grand que le côté BA.

Constr. Supposez qu'un arc AD d'un grand cercle divise l'angle A en deux parties, dont l'une DAC soit égale à l'angle C.

Démonstr. Dans le triangle ABD, les côtés BD & DA pris ensemble, valent plus que le
(a) N. 209. côté BA (*a*). Or, le côté DA est égal au cô-
(b) N. 216. té DC (*b*); puisque dans le triangle ADC, les angles C & DAC sont égaux [c]. Donc, les côtés BD & DC pris ensemble, (c'est-à-dire, le côté BC,) valent plus que le côté BA; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

219. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique quelconque, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*

PROPOSITION VI. Théorême.

220. *Si dans un triangle-Sphérique quelconque, un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

* Fig. 80. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, le côté

côté BA est plus grand que le côté BC, l'angle C sera plus grand que l'angle A.

Démonstr. Si l'angle C étoit égal à l'angle A, le côté BA seroit égal au côté BC (*a*). Et si l'angle C étoit moins grand que l'angle A, le côté BA seroit moins grand que le côté BC (*b*). Or, le côté BA n'est ni égal au côté BC, ni moins grand que le côté BC; puisque [H] il est plus grand que ce côté. Donc; l'angle C n'est ni égal à l'angle A, ni moins grand que l'angle A; & par conséquent, il est plus grand que l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

(a) N. 216.
(b) N. 218.

COROLLAIRE.

221. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique quelconque, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

PROPOSITION VII. Théorême.

222. *Dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque angle adjacent à l'hypoténuse est de même espèce que le côté qui lui est opposé.*

Premiérement.

223. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AB est le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C sera droit.

Démonstr. L'arc AB qui est perpendiculaire à l'arc AC, puisque [H] l'angle A est droit, est le quart de la circonférence d'un cercle [H]: ainsi, son extrémité B est l'un des Pôles de cet arc AC (*c*); & par conséquent, l'arc BC qui passe par ce point B, est aussi perpendiculaire à ce même arc AC (*d*). Or, puisque l'arc BC est

* Fig. 81.
(c) N. 191.
(d) N. 189.

perpendiculaire à l'arc AC, l'angle C est droit.

Secondement.

* Fig. 82. 224. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AB est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle ACB sera aigu.

Constr. Prolongez le côté AB vers D, jusqu'à ce que l'arc AD soit le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite qu'un arc CD d'un grand cercle, passe par le sommet de l'angle ACB, & par le point D.

Démonstr. Dans le triangle-Sphérique ADC, (a) N. 223. l'angle ACD est droit (*a*); puisque [c] le côté AD est le quart de la circonférence d'un cercle. Or, l'angle ACB est moins grand que l'angle ACD; puisqu'il n'en est qu'une partie. Donc, l'angle ACB est moins grand qu'un angle droit; (b) E. l. 1. d. 12. & par conséquent, il est aigu (*b*).

Troisiémement.

225. Enfin, si dans le triangle-Sphérique * Fig. 83. ABC * qui est rectangle en A, le côté AB est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle ACB sera obtus.

Constr. Prenez sur le côté AB un arc AD égal au quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite qu'un arc CD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle ACB, & par le point D.

Démonstr. Dans le triangle-Sphérique ADC, (c) N. 223. l'angle ACD est droit (*c*); puisque [c] le côté AD est le quart de la circonférence d'un cer-

de. Or, l'angle ACB est plus grand que l'angle ACD; puisque ce dernier angle n'est qu'une partie du premier. Donc, l'angle ACB est plus grand qu'un angle droit; & par conséquent, il est obtus (a).

(a) E. l. 1. d. 11.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

226. IL suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque côté adjacent à l'hypotenuse est de même espece que l'angle qui lui est opposé.*

Premiérement.

227. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'angle C est droit, le côté AB sera le quart de la circonférence d'un cercle.

*Fig. 84.

Démonstr. Si le côté AB étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit aigu (b): & si ce côté étoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit obtus (c). Or, l'angle C n'est ni aigu, ni obtus; puisqu'il est droit [H]. Donc, le côté AB n'est ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est le quart de la circonférence d'un cercle.

(b) N. 224.
(c) N. 225.

Secondement.

228. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'angle C est aigu, le côté AB sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

*Fig. 81.

Démonstr. Si le côté AB étoit le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit
(a) N. 223. droit (*a*) : & si ce côté étoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit
(b) N. 225. obtus (*b*). Or, l'angle C n'est ni droit, ni obtus; puisqu'il est aigu [H]. Donc, le côté AB n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Troisiémement.

229. Enfin, si dans le triangle-Sphérique
* Fig. 86. ABC * qui est rectangle en A, l'angle C est obtus, le côté AB sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si le côté AB étoit le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit
(c) N. 223. droit (*c*) : & si ce côté étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C se-
(d) N. 224. roit aigu (*d*). Or, l'angle C n'est ni droit, ni aigu; puisqu'il est obtus [H]. Donc, le côté AB n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

230. Il suit de ce corollaire, que *si de l'un qualconque des angles d'un triangle-Sphérique obliquangle, on tire un arc de cercle perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, cet arc passera dans*

un triangle †, *lorsque les angles adjacents à ce côté seront de même espece ; & hors de ce triangle, lorsque ces angles seront de différente espece.*

Premiérement.

Si dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, chaque angle A & C adjacent au côté AC est aigu, l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera dans ce triangle. * Fig. 87.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B, & rencontre en un point quelconque D hors du triangle ABC, le côté AC prolongé vers ce point.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passeroit point dans le triangle ABC, pouvoit être perpendiculaire au côté AC prolongé autant qu'il le seroit nécessaire, cet arc seroit en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*a*); (a) N. 228. puisque [*H*] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est aigu [*H*] : & plus que le quart de la circonférence d'un cercle (*b*); (b) N. 229. puisque [*H*] le triangle CBD seroit aussi rectangle en D, & que l'angle BCA étant aigu [*H*], l'angle BCD de ce dernier triangle, auquel ce même arc seroit aussi opposé, est obtus (*c*). Or, un (c) N. 198.

† On entend par *un arc qui passe dans un triangle*, un arc qui y passe effectivement, ou qui y passeroit s'il étoit prolongé. Et par *un arc qui passe hors d'un triangle*, un arc qui ne passeroit point dans un triangle, quand même il seroit prolongé.

même arc ne peut être en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passera point dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe dans ce triangle.

Secondement.

* Fig. 28. Si dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, chaque angle A & C adjacent au côté AC est obtus, l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera aussi dans ce triangle.

Constr. La même que la précédente.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passeroit point dans le triangle ABC, pouvoit être perpendiculaire au côté AC prolongé autant qu'il le seroit nécessaire, cet arc seroit en même temps plus que le quart
(a) N. 229. de la circonférence d'un cercle (*a*); puisque [*H*] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est obtus [*H*]: & moins que le quart
(b) N. 228. de la circonférence d'un cercle (*b*); puisque le triangle CBD seroit aussi rectangle en D [*H*], & que l'angle BCA étant obtus [*H*], l'angle BCD de ce dernier triangle, auquel ce même
(c) N. 198. arc seroit aussi opposé, est aigu (*c*). Or, un même arc ne peut être en même temps plus que le

quart de la circonférence d'un cercle, & moins que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passera point dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe dans ce triangle.

Troisiémement.

Enfin, si dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC*, les angles A & C qui sont adjacents au côté AC sont de différente espece, (par exemple, l'angle A aigu, & l'angle C obtus,) l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera hors de ce triangle. * Fig. 89.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B, & rencontre le côté AC en un point D pris à volonté sur ce côté.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B passeroit dans le triangle ABC, pouvoit être perpendiculaire au côté AC, cet arc seroit en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*a*); (a) N. 228. puisque [*H*] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est aigu [*H*]: & plus que le quart de la circonférence d'un cercle (*b*); puisque [*H*] le triangle DBC seroit aussi rec- (b) N. 229. tangle en D, & que l'angle C de ce dernier

triangle, auquel ce même arc seroit aussi opposé, est obtus [H]. Or, un même arc ne peut être en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B, passera dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe hors de ce triangle. Donc, C.Q.F.D.

PROPOSITION VIII. Théorême.

231. *Si dans un triangle-Sphérique rectangle, l'un des côtés est le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse le sera aussi.*

* Fig. 96. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AB est le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC le sera aussi.

Démonstr. L'arc AB est perpendiculaire à l'arc AC, puisque [H] l'angle A est droit. Ainsi, puisque [H] cet arc AB est le quart de la circonférence d'un cercle, son extrémité B est l'un

(a) N. 192. des Pôles de l'arc AC (*a*); & par conséquent, puisque l'hypoténuse BC est un arc d'un grand cercle, qui est compris entre cette extrémité B & ce même arc AC, cette hypoténuse est

(b) N. 188. aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*b*). Donc, C.Q.F.D.

COROLLAIRE.

232. IL suit de ce théorême, que *si dans un triangle-Sphérique rectangle, l'un des angles adjacents*

adjacents à l'hypoténuse est droit, cette hypoténuse sera le quart de la circonférence d'un cercle.

Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'angle C est droit, l'hypoténuse BC sera le quart de la circonférence d'un cercle. Fig. 90.

Démonstr. Puisque [H] l'angle C est droit, le côté AB qui est opposé à cet angle, est le quart de la circonférence d'un cercle (*a*); & par conséquent, l'hypoténuse BC est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*b*). Donc, C. Q. F. D.

(a) N. 227. (b) N. 231.

PROPOSITION IX. Théorême.

233. *Dans un triangle-Sphérique rectangle, l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque chaque côté est moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle; & plus que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'un des côtés est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus.*

Premiérement.

234. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, chaque côté AB & AC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BHC le sera aussi. Fig. 91.

Constr. Du sommet de l'angle B, abbaissez au plan du côté AC, la perpendiculaire BE (*c*); & prolongez ce côté vers D, jusqu'à ce que l'arc AD soit le quart de la circonférence d'un cercle. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, tirez aux points C & D,

(c) E. l. 11. P. 11.

les lignes droites EC & ED; & du point B aux mêmes points C & D, les lignes droites BC & BD. Enfin, du même point précedent E, tirez une ligne droite EF qui passe par le centre G de l'arc AD; & supposez qu'un arc BID d'un grand cercle passe par les points B & D.

Démonstr. Les triangles BEC & BED sont rectangles l'un & l'autre en E; puisque la ligne BE qui est perpendiculaire [c] au plan des lignes EC & ED, l'est aussi (*a*) à chacune de ces lignes, avec lesquelles elle a le point E de commun : le côté BE leur est commun : & le côté EC du premier, est moins grand que le côté ED du second (*b*); puisque ce côté EC est plus éloigné que le côté ED, de la ligne EF qui [c] passe par le centre G du cercle ACF. Donc (*c*), l'hypoténuse BC du triangle BEC, est moins grande que l'hypoténuse BD du triangle BED; & par conséquent, puisque ces hypoténuses sont [c] les cordes des arcs BHC & BID, l'arc BHC est moins grand que l'arc BID (*d*). Mais, l'arc BID est le quart de la circonférence d'un cercle (*e*); puisque [c] le côté AD du triangle-Sphérique rectangle ABD dont cet arc est l'hypoténuse, est le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, l'arc BHC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, puisque ce dernier arc est l'hypoténuse du triangle-Sphérique ABC, l'hypoténuse de ce triangle est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

(*a*) E. l. 11. d. 3.

(*b*) E. l. 3. p. 7.

(*c*) E. l. 1. p. 47.

(*d*) E. l. 3. p. 15.

(*e*) N. 231.

Secondement.

235. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, chaque côté AB & AC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle. * Fig. 94

Constr. Prolongez les côtés AB & AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point D.

Démonstr. Le triangle-Sphérique DBC est rectangle en D; puisque (*a*) les angles A & D qui [c] sont des angles opposés, sont égaux, & que [*H*] l'angle A est droit: & les côtés DB & DC sont chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [*H*] chaque côté AB & AC du triangle ABC, dont ces premiers côtés sont les supplémens (*b*), est plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, l'hypoténuse BC de ce premier triangle est moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*c*); & par conséquent, puisque cette même hypoténuse est aussi celle du triangle ABC, l'hypoténuse du triangle ABC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

(a) N. 197. (b) N. 6. (c) N. 234.

Troisièmement.

236. Enfin, si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, les côtés AC & AB sont, l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins, (par exemple le côté AC plus, & le côté AB moins,) l'hypoténuse BHC sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle. * Fig. 93.

Constr. Du sommet de l'angle B abbaissez
(a) E. l. 11. p. 11. au plan du côté AC, la perpendiculaire BE (a); & prenez sur ce côté un arc AD égal au quart de la circonférence d'un cercle. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, tirez aux points D & C, les lignes droites ED & EC; & du point B aux mêmes points D & C, les lignes droites BD & BC. Enfin, du même point précedent E, tirez une ligne droite EF qui passe par le centre G de l'arc AC; & supposez qu'un arc BID d'un grand cercle, passe par les points B & D.

Démonstr. Les triangles BEC & BED sont rectangles l'un & l'autre en E; puisque la ligne BE qui est perpendiculaire [c] au plan des li-
(b) E. l. 11. d. 2. gnes EC & ED, l'est aussi (b) à chacune de ces lignes, avec lesquelles elle a le point E de commun: le côté BE leur est commun: & le côté EC du premier, est plus grand que le côté ED
(c) E. l. 3. p. 9. du second (c); puisque ce côté EC est plus près que le côté ED, de la ligne EF qui [c] passe
(d) E. l. 1. p. 47. par le centre G du cercle ACF. Donc (d), l'hypoténuse BC du triangle BEC, est plus grande que l'hypoténuse BD du triangle BED; & par conséquent, puisque ces hypoténuses sont [c] les cordes des arcs BHC & BID, l'arc
(e) E. l. 3. p. 15. BHC est plus grand que l'arc BID (e). Mais, l'arc BID est le quart de la circonférence d'un
(f) N. 231. cercle (f); puisque [c] le côté AD du triangle-Sphérique rectangle ABD dont cet arc est l'hypoténuse, est le quart de la circonférence d'un

cercle. Donc, l'arc BHC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, puisque ce dernier arc est l'hypoténuse du triangle-Sphérique ABC, l'hypoténuse de ce triangle est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

237. IL suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque côté est moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & l'un des côtés est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, lorsque l'hypoténuse est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.*

Premiérement.

238. SI dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque côté AB & AC sera moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle. * Fig. 94.

Démonstr. Si les côtés AB & AC étoient, l'un ou l'autre, ou chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC le seroit aussi (*a*) : & si ces mêmes côtés étoient, l'un moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, cette même hypoténuse seroit plus que le quart de la circonférence d'un cercle (*b*). Or, l'hypoténuse BC n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni plus que le

(*a*) N. 231.

(*b*) N. 233

quart de la circonférence d'un cercle; puiſqu'elle eſt moins que ce quart [H]. Donc, les côtés AB & AC ne ſont ni l'un ou l'autre, ni chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, ni l'un moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus; & par conſéquent, ils ſont chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou chacun plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Secondement.

*Fig. 95. 239. Si dans un triangle-Sphérique ABC * qui eſt rectangle en A, l'hypoténuſe BC eſt plus que le quart de la circonférence d'un cercle, les côtés AB & AC feront, l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins.

Démonſtr. Si les côtés AB & AC étoient, l'un ou l'autre, ou chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuſe BC le feroit
(a) N. 231. auſſi (*a*): & ſi ces mêmes côtés étoient chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou chacun plus, cette même hypoténuſe feroit moins que le quart de la circonfé-
(b) N. 233. rence d'un cercle (*b*). Or, l'hypoténuſe BC n'eſt ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle; puiſqu'elle eſt plus que ce quart [H]. Donc, les côtés AB & AC ne ſont ni l'un ou l'autre, ni chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, ni chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni chacun plus; &

par conséquent, l'un est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins.
Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

240. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique rectangle, l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque chaque angle qui lui est adjacent est ou aigu, ou obtus; & plus que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'un de ces angles est aigu, & l'autre obtus.*

Premiérement.

Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, chaque angle B & C adjacent à l'hypoténuse BC est ou aigu, ou obtus, cette hypoténuse sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle. * Fig. 94.

Démonstr. Dans un triangle-Sphérique rectangle, les côtés sont de même espece que les angles ausquels ils sont opposés (*a*). Ainsi, si dans le triangle-Sphérique ABC, chaque angle B & C est aigu [H], chaque côté AC & AB adjacent à l'hypoténuse BC, sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle: & si chacun de ces angles est obtus [H], chacun de ces côtés sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Or, dans l'un & dans l'autre de ces cas, hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*b*); & par conséquent, C. Q. F. 1° D.

(*a*) N. 226.
(*b*) N. 233.

Secondement.

*Fig. 95. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'un des angles B & C adjacents à l'hypoténuse BC est aigu, & l'autre obtus, cette hypoténuse sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Dans un triangle-Sphérique rectangle, les côtés sont de même espece que les (a) N. 226. angles ausquels ils sont opposés (*a*). Ainsi, puisque [*H*] dans le triangle-Sphérique ABC, l'un des angles B & C est aigu, & l'autre obtus, l'un des côtés AC & AB adjacents à l'hypoténuse BC, est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus; & par conséquent, cette hypoténuse est plus que le quart (b) N. 236. de la circonférence d'un cercle (*b*). Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

241. IL suit encore de ce théorême, que *dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque angle adjacent à l'hypoténuse est ou aigu, ou obtus, lorsque cette hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & l'un de ces angles est aigu, & l'autre obtus, lorsque cette hypoténuse est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.*

Premiérement.

*Fig. 94. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque

que angle B & C adjacent à cette hypoténuſe eſt ou aigu, ou obtus.

Démonſtr. Puiſque [*H*] l'hypoténuſe BC eſt moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque côté AB & AC eſt moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou plus que le quart de la circonférence d'un cercle (*a*); & par conſéquent, puiſque (*b*) les angles adjacents à l'hypoténuſe ſont de même eſpece que les côtés auſquels ils ſont oppoſés, chaque angle C & B eſt ou aigu, ou obtus.

(*a*) N. 237.
(*b*) N. 228.

Secondement.

Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui eſt rectangle en A, l'hypoténuſe BC eſt plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des angles B & C adjacents à cette hypoténuſe ſera aigu, & l'autre obtus.

* Fig. 95.

Démonſtr. Puiſque [*H*] l'hypoténuſe BC eſt plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés AB & AC eſt moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus (*c*); & par conſéquent, puiſque (*d*) les angles adjacents à l'hypoténuſe ſont de même eſpece que les côtés auſquels ils ſont oppoſés, l'un des angles B & C eſt aigu, & l'autre obtus. Donc, C. Q. F. D.

(*c*) N. 237.
(*d*) N. 228.

COROLLAIRE IV.

242. Il ſuit enfin de ce théorême, que *ſi dans un triangle-Sphérique rectangle, l'hypoténuſe eſt le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés le ſera auſſi.*

* Fig. 96. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés AB & AC le sera aussi.

Démonstr. Si chaque côté AB & AC étoit ou moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC seroit moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*a*): & si l'un de ces côtés étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, cette hypoténuse seroit plus que le quart de la circonférence d'un cercle (*b*). Or, l'hypoténuse BC n'est dans aucun de ces cas, puisqu'elle est le quart de la circonférence d'un cercle [*H*]. Donc, les côtés AB & AC ne sont, ni tous les deux moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni tous les deux plus, ni l'un de ces côtés n'est point moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus; & par conséquent, ils sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle, ou l'un est le quart, & l'autre ou plus, ou moins, que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

(*a*) N. 233.

(*b*) N. 233.

CHAPITRE IV.

De la Projection.

DÉFINITIONS.

143. SI l'on regarde de fort loin un objet Y* placé vis-à-vis d'une surface quelconque X, les points B, C, D, &c. de cet objet, semblent être les points *b*, *c*, *d*, &c. de cette surface, ausquels vont se terminer les lignes droites AB*b*, AC*c*, AD*d*, &c. qui sont tirées de l'œil A du Spectateur par ces points B, C, D, &c. & par conséquent, cet objet paroît être tracé sur cette surface. Or, la figure, ou plutôt l'*apparence* d'un objet, ainsi déterminée sur une surface quelconque, par la rencontre de cette surface & des lignes droites qui sont tirées de l'œil du Spectateur par chaque point de cet objet, s'appelle la *Projection naturelle* de ce même objet. Et cette surface sur laquelle cette apparence est tracée, se nomme la *surface de Projection*: ou le *plan de Projection*, si elle est une surface plane. * Fig. 97.

144. Mais, comme toutes les dimensions d'un objet sont ordinairement changées dans sa projection, par cette maniére de la tracer, qui supposant l'œil du Spectateur immobile, fait également dépendre la grandeur de ces dimensions, & de celle de l'objet, & de la dis-

tance du même objet au plan de projection; on s'en sert seulement dans la Perspective. Et lorsqu'il s'agit de Géométrie, on considere l'œil du Spectateur comme étant mobile; afin qu'en le supposant toujours placé directement vis-à-vis du point dont on cherche la projection, celle de l'objet entier ne soit determinée que par des perpendiculaires abbaissées de chaque point de cet objet à son plan de projection; & que par-là, la distance de ce même objet à ce plan soit absolument indifférente à la grandeur de ses dimensions dans sa projection. Or, l'apparence d'un objet quelconque ainsi déterminée sur un plan, par des perpendiculaires abbaissées de chaque point de cet objet à ce plan, se nomme la *Projection Géométrale*, ou *Ortographique* de ce même objet.

COROLLAIRE I.

245. Il suit de cette derniére définition, que *si un plan quelconque est perpendiculaire à un autre, la commune section de ces plans sera leur projection.*

* Fig. 98. La commune section AB * des plans X & Y dont le premier est perpendiculaire à l'autre, est la Projection du plan X sur le plan Y.

Démonstr. Puisque le plan X est perpendiculaire [*H*] au plan Y, toute perpendiculaire abbaissée d'un point quelconque du plan X au plan Y, passe par la commune section AB de ces plans (*a*). Ainsi, chaque point du plan X semble être un point de cette com-

(a) E. l. 11. n. 38.

mune section; & par conséquent, cette commune section est l'apparence du plan X déterminée sur le plan Y, par des perpendiculaires abbaissées de chaque point de ce premier plan au dernier. Or, puisque cette commune section est l'apparence du plan X ainsi déterminée sur le plan Y, elle est la projection du premier de ces plans sur le dernier (a); & par conséquent, (a) N. 244.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

246. IL suit aussi de cette même définition, que *si un arc de cercle quelconque, (qui n'est cependant pas plus grand que le quart de la circonférence de ce cercle,) est vû parallelement au rayon qui le termine par l'une de ses extrémités, sa projection sera son sinus.*

La projection DC* de l'arc de cercle AB, * Fig. 99.
vû parallelement au rayon BC qui le termine par son extrémité B, est le sinus de cet arc.

Constr. De l'extrémité A de l'arc AB abbaissez au rayon BC, la perpendiculaire AE (b). (b) E. 1. 1. P. 12.

Démonstr. Puisque (c) la projection de l'arc AB doit être déterminée par des perpendiculaires abbaissées de chaque point de cet arc à son plan de projection X, & que [H] ces perpendiculaires doivent être paralleles au rayon BC qui termine ce même arc par son extrémité B, ce rayon BC est perpendiculaire à ce plan X (d). Mais, ce même rayon est dans le plan de l'arc AB. Donc, le plan de cet arc est aussi perpendiculaire à ce même (c) N. 244. (d) E. l. 11. P. 8.

(a) E. l. 11. p. 18. plan X (a). Ainsi (b), la commune section de
(b) N. 245. ces deux plans est la projection du premier; & par conséquent la partie de cette commune section, qui est comprise entre les perpendiculaires AD & BC qui lui sont abbaissées des extrémités A & B de cet arc AB, est la projection de cet arc. Or, cette partie de cette commune section est aussi le sinus de ce même arc. Car, si cet arc est éloigné de son plan de projection X, cette partie est une ligne droite
(c) E. l. 1. p. 34. DC égale (c) à la perpendiculaire AE qui est
(d) N. 7. ce sinus (d): & si ce même arc est posé immédiatement sur son plan de projection, cette partie est cette perpendiculaire même AE. Donc, la projection de l'arc AB est le sinus du même arc AB; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

247. Il suit enfin de cette même définition, que *si un cercle est incliné à un plan quelconque, la projection de ce cercle sur ce plan sera une* Ellipse †, *qui aura pour petit axe le double du sinus du complément de l'inclinaison de ce cercle à ce plan; & pour grand axe, le diamètre de ce même cercle.*

* Fig. 100. La projection AGHD * du demi-cercle ABCD qui est incliné à son plan de projection X, est une demi-Ellipse, dont la moitié FH

† L'*Ellipse* est une figure plane terminée par une seule ligne
* Fig. 100. RIMK *; & dont les *ordonnées*, c'est-à-dire, les perpendiculaires LM, NO, PQ, &c. à l'un des *axes* IK, sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes CD, EF, GH, &c. d'un cercle ADB, dont le diamètre est égal à ce même axe.

du petit axe est le sinus du complément de l'inclinaison de ce demi-cercle à ce plan; & dont le grand axe est le diamétre AD de ce même demi-cercle.

Constr. Elevez au diamétre AD (*a*) les perpendiculaires FC & EB, qui soient chacune dans le plan du demi-cercle ABCD; & passent, l'une par son centre F, & l'autre par tel point E de ce diamétre que l'on voudra. Des mêmes points F & E, élevez au même diamétre AD, les perpendiculaires FH & EG (*b*), qui soient chacune dans le plan X. Enfin, des points C & B ausquels les perpendiculaires FC & EB rencontrent la circonférence de ce même demi-cercle, abbaissez aux perpendiculaires précédentes FH & EG, les perpendiculaires CH & BG (*c*).

(*a*) E. l. 1. p. 11.

(*b*) E. l. 1.

(*c*) E. l. 1. p. 11.

Démonstr. *Premiérement*, la projection d'un objet quelconque sur un plan, doit être déterminée (*d*) par des perpendiculaires abbaissées de chaque point de cet objet à ce plan. Ainsi, puisque les lignes CH & BG sont des perpendiculaires abbaissées des points C & B de la circonférence du demi-cercle ABCD au plan X (*e*), la circonférence de la projection AGHD de ce demi-cercle sur ce plan, doit passer par les points H & G ausquels ces perpendiculaires CH & BG rencontrent ce même plan; & par conséquent, les perpendiculaires FH & EG au diamétre AD de cette projection, sont des ordonnées de cette même projection. Or, ces ordonnées sont proportionnelles aux

(*d*) N. 244.

(*e*) E. l. 11. p. 11.

ordonnées FC & EB du demi-cercle ABCD qui leur correſpondent. Car, puiſqu'elles ſont perpendiculaires chacune [c] à une même li-
(a) E. l. 1. gne AD, elles ſont paralleles entr'elles (a) : &
p. 18. par une raiſon pareille, les ordonnées FC & EB du demi-cercle ABCD le ſont auſſi. Ainſi, dans les triangles FCH & EBG qui ſont rectangles l'un en H & l'autre en G [c], les angles CFH &
(b) E. l. 11. BEG ſont égaux (b). Donc (c), ces triangles ſont
p. 10. équiangles ; & par conſéquent (d), FH : EG : :
(c) E. l. 1.
p. 32. FC : EB. Mais, cette même démonſtration
(d) E. l. 6. ſubſiſte, à quelque endroit du diamétre AD que
p. 4. l'on prenne le point E. Donc, toutes les ordonnées de la projection AGHD du demi-cercle ABCD, ſont proportionnelles à celles de ce même demi-cercle qui leur correſpondent ; & par conſéquent, cette projection eſt une demi-Ellipſe.

Secondement, les lignes FC & FH ſont [c] des perpendiculaires à la commune ſection AD des plans du demi-cercle ABCD & de la projection AGHD de ce demi-cercle, tirées d'un même point F de cette commune ſection, l'une dans l'un de ces plans, & l'autre dans l'au-
(e) E. l. 11. tre. Ainſi (e), l'angle CFH formé par ces lignes,
d. 5. eſt l'inclinaiſon du demi-cercle ABCD à ſon
(f) N. 20. † plan de projection X. Or (f), l'angle FCH eſt le complément de cet angle CFH ; puiſque [c]
(g) N. 7. le triangle FHC eſt rectangle en H : & (g) la moitié FH du petit axe de la projection AGHD de ce demi-cercle, eſt le ſinus de cet angle FCH ; puiſqu'elle eſt [c] une perpendiculaire abbaiſſée

de

de l'extrémité F de l'arc FI qui est la mesure de cet angle FCH, au rayon CI qui termine ce même arc par son autre extrémité I. Donc, la moitié FH du petit axe de la projection AGHD du demi-cercle ABCD, est le sinus du complément de l'inclinaison de ce demi-cercle à son plan de projection X; & par conséquent, si un cercle est incliné à un plan quelconque, sa projection sur ce plan sera toujours une Ellipse, qui aura pour petit axe le &c. & pour grand axe le &c.

PROBLESME I.

248. *Tracer la projection d'un cercle dont on connoit le diamétre, avec l'inclinaison au plan de projection.*

On donne le diamétre AB * du cercle ADB, de 100 parties égales; avec l'inclinaison de ce cercle à son plan de projection, de 42 deg. 28 min. & il faut tracer la projection de ce même cercle. * Fig. 101.

Solution. Divisez en un grand nombre de parties CE, EG, &c. prises à volonté, le rayon CA du cercle proposé. Des points C, E, G, &c. ausquels ces parties se terminent, élevez à ce même rayon (a) les perpendiculaires CD, EF, GH, &c. Tirez deux lignes droites IK & RM, qui se coupent perpendiculairement (b). Prenez sur l'une de ces lignes, les parties LI & LK égales chacune au même rayon CA; & sur l'autre, les parties LM & LR égales chacune à la moitié du petit axe de la projection demandée,

(a) E. I. 1. p. 11.

(b) E. I. 1. p. 11.

(a) N. 111. que vous trouverez (a) de la maniére suivante. †

Logarithme du sinus du complément de l'inclinaison du cercle ADB, donnée de 42 deg. 28 m. -	9.8678623
Logarithme de la moitié du diamétre du même demi-cercle, donné de 100 parties - - - - -	1.6989700
Logarithme de la moitié du petit axe demandé -	11.5668323

(b) N. 100. qui (b) donnera $36\frac{87}{100}$ de ces parties égales, pour la valeur de cette moitié.

Prenez ensuite sur la ligne IK, les parties LN & L*a* égales chacune à la partie CE du rayon CA; les parties NP & *ab*, égales chacune à la partie EG; & ainsi de suite. Par les points N, P, &c. *a*, *b*, &c. ausquels ces parties se
(c) E. l. 1. p. 31. terminent, tirez (c) à la perpendiculaire RM; les paralleles SO, TQ, &c. VX, YZ, &c. que
(d) E. l. 6. p. 12. vous déterminerez, en faisant (d) les parties NO & NS, *a*V & *a*X égales chacune à une quatriéme proportionnelle aux lignes CD, LM & EF; les parties PQ & PT, *b*Z & *b*Y, égales chacune à une quatriéme proportionnelle aux lignes CD, LM & GH; & ainsi de suite. Enfin, tracez une ligne qui passe par les points R, S, T, I, Q, O, M, X, Z, K, &c. & la figure RIMK terminée par cette ligne, sera la projection demandée.

† Le rayon d'un cercle qui est mis en projection, peut toujours former avec la moitié du petit axe de cette projection, & la perpendiculaire qui est abbaissée de l'extrémité de ce même rayon à celle de ce petit axe, un triangle-rectangle dont il est l'hypoténuse. *Voyez la Figure 199.*

Démonstr. Dans la figure RIMK, le grand axe IK est égal [c] au diamétre AB du cercle ADB; & les ordonnées NO, PQ, &c. sont proportionnelles [c] aux ordonnées EF, GH, &c. du même cercle, qui leur correspondent. Ainsi (a), cette figure est une Ellipse. Or [c], cette Ellipse a pour petit axe RM, le double du sinus du complément de l'inclinaison de ce cercle ADB à son plan de projection; & l'on vient de dire que son grand axe IK est égal au diamétre AB de ce même cercle. Donc (b), elle est la projection de ce cercle; & par conséquent, C. Q. F. F.

(a) N. 247.

(b) N. 247.

PROBLESME II.

249. *Connoissant les deux axes d'une Ellipse qui est la projection d'un cercle, trouver l'inclinaison de ce cercle au plan de projection.*

On donne le grand axe IK * de l'Ellipse RIMK qui est la projection d'un cercle, de 100 parties égales; avec le petit axe RM de cette même Ellipse, de $73\frac{17}{50}$ de ces mêmes parties: & il faut trouver l'inclinaison de ce cercle à son plan de projection.

* Fig. 101.

Solution. Le rayon d'un cercle qui est mis en projection, est toujours égal (c) à la moitié du grand axe de la projection de ce cercle; & peut toujours former avec la moitié du petit axe de la même projection & la perpendiculaire qui est abbaissée de l'extrémité de ce

(c) N. 247.

même rayon à celle de ce petit axe, un triangle-rectangle dont il est l'hypoténuse †.
(a) N. 127. Ainsi (a) :

Complément du logarithme de la moitié du grand axe IK donné de 100 parties - - - - - -	8.3010300
Logarithme de la moitié du petit axe RM donné de $73\frac{37}{50}$ - - - - - - - - - - - - - -	1.5668323
Logarithme du sinus du complément de l'inclinaison demandée - - - - - - - - - - - -	9.8678623

(b) N. 103. qui (b) donnera 47 deg. 32 m. pour ce complément ; & par conséquent, 42 deg. 28 m. pour l'inclinaison demandée.

Donc, C. Q. F. D.

† *Voyez la Figure 100.*

SECTION SECONDE.

Des Principes particuliers, des Problêmes, & des Usages de la Trigonométrie-Sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes particuliers de la Trigonométrie-Sphérique.

PROPOSITION I. Théorême.

250. *Dans un triangle Sphérique quelconque, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui sont opposés à ces côtés.*

* Fig. 102. & 103. Dans le triangle-Sphérique ABC *, le sinus du côté AB est au sinus du côté BC, comme

le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A : le sinus du côté AC est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A : enfin, le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B.

Le triangle ABC *est rectangle, ou n'est point rectangle.*

PREMIER CAS.

251. *Lorsque le triangle* ABC * *est rectangle en* A. * Fig. 102.

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur la surface de sa Sphére, tracez (*a*) sa projection DEF, sur celui des grands cercles de cette Sphére auquel le rayon TC, la commune section des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C, est perpendiculaire. Prolongez ensuite les côtés FD & EE de cette projection, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en des points G & O, H & S, la circonférence GPOQ de ce cercle. Par le point E qui est commun aux côtés FE & DE, tirez (*b*) la parallele RK au diamétre GO. Tirez aussi (*c*) le diamétre PQ perpendiculaire au même diamétre GO. Prolongez (*d*) le côté DE, jusqu'à ce qu'il rencontre en des points P & Q la même circonférence GPOQ. Enfin, des points E, H & K abbaissez au diamétre GO (*e*), les perpendiculaires EN, HI & KM.

(*a*) N. 248. (*b*) E. l. 1. p. 31. (*c*) E. l. 1. p. 11. (*d*) N. 248. (*e*) E. l. 1. p. 12.

Démonstr. Premiérement, les lignes FD & RE qui [c] sont chacune perpendiculaires au diamétre PQ, sont les ordonnées de la

demi-Ellipse PDQ, qui correspondent aux ordonnées FG & RK du demi-cercle PGQ.
(a) N. 247. Ainsi (a), l'arc DE de cette demi-Ellipse est la projection de l'arc GK de ce demi-cercle. Or, ce même arc DE est aussi [c] la projection de l'arc AB. Donc, l'arc GK est égal
(b) N. 7. à l'arc AB ; & par conséquent, puisque (b) la ligne KM qui [c] est perpendiculaire au diamétre GO, est le sinus de l'arc GK ; & que la ligne EN qui [c] est aussi perpendiculaire au même diamétre GO, est égale à la ligne
(c) E. l. 1. p. 34. KM (c), la ligne EN est le sinus de l'arc AB.

Secondement, le rayon TC qui termine l'arc BC par son extrémité C, est perpendiculaire au plan de projection GPOQ [c]. Ainsi, la ligne EF qui [c] est la projection de cet arc sur
(d) N. 246. ce plan, est le sinus de ce même arc (d).

Troisiémement, les lignes FH & FG sont tirées d'un même point de la commune section TC des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C ; puisque cette commune section étant un rayon de la Sphére dont le cercle GPOQ
(e) N. 184. est un grand cercle [c], elle passe (e) par le centre F de cette Sphére, duquel ces lignes sont tirées : elles sont perpendiculaires à cette com-
(f) E. l. 11. d. 2. mune section (f) ; puisque cette commune section avec laquelle elles ont le point F de commun, est perpendiculaire [c] au plan GPOQ dans lequel elles sont tirées : & elles sont, l'une dans le plan du secteur BTC, & l'autre dans le plan du secteur ATC ; puisque les plans de ces

secteurs, & par conséquent les cercles dont ces secteurs sont des parties, étant perpendiculaires (a) au plan de projection GPOQ, les lignes HS & GO qui [c] sont les projections de ces cercles sur ce plan, sont aussi (b) les communes sections de ces mêmes cercles & de ce même plan. Ainsi (c), l'angle GFH qui est formé par ces lignes, est l'inclinaison des plans de ces secteurs. Donc (d), il est égal à l'angle C; & par conséquent, puisque (e) la ligne HI qui [c] est perpendiculaire au diamétre GO, est le sinus de l'angle GFH, elle est aussi celui de l'angle C.

(a) E. l. 11. p. 18.
(b) N. 245.
(c) E. l. 11. d. 5.
(d) N. 194.
(e) N. 7.

Quatriémement, la ligne HF est le sinus du quart de la circonférence du cercle GPOQ (f); puisqu'elle est un rayon de ce cercle [c]. Or, l'angle A a pour mesure le quart de la circonférence de ce même cercle; puisque cet angle est droit [H]. Donc, la ligne HF est le sinus de l'angle A.

(f) N. 8.

Cinquiémement enfin, les triangles NEF & IHF sont équiangles (g); puisqu'ils sont rectangles, l'un en N & l'autre en I [c], & que l'angle F leur est commun. Ainsi (h), EN : EF :: HI : HF. Or, EN est le sinus du côté AB [D 1.]: EF est le sinus du côté BC [D 2.]: HI est le sinus de l'angle C [D 3.]: & HF est le sinus de l'angle A [D 4.]. Donc, &c.

(g) E. l. 1. p. 32.
(h) E. l. 6. p. 4.

Si l'on trace ensuite la projection du même triangle ABC, sur celui des grands cercles de la même Sphére auquel la commune section TB des secteurs ATB & BTC qui forment

l'angle B, eſt perpendiculaire; on démontrera de la même maniére dont on vient de démontrer la proportion précédente, que le ſinus du côté AC eſt au ſinus du côté BC, comme le ſinus de l'angle B eſt au ſinus de l'angle A.

(a) E. l. 5. p. 16.
ENFIN, ſi l'on échange chacune des deux proportions précédentes, on aura (a) ces deux nouvelles proportions: le ſinus du côté AB eſt au ſinus de l'angle C, comme le ſinus du côté BC eſt au ſinus de l'angle A: & le ſinus du côté AC eſt au ſinus de l'angle B, comme le ſinus du côté BC eſt au ſinus de l'angle A.

(b) E. l. 5. p. 11.
(c) E. l. 5. p. 16.
Dont on concluera (b), que le ſinus du côté AB eſt au ſinus de l'angle C, comme le ſinus du côté AC eſt au ſinus de l'angle B; & par conſéquent (c), que le ſinus du côté AB eſt au ſinus du côté AC, comme le ſinus de l'angle C eſt au ſinus de l'angle B. Donc, C. Q. F. D.

SECOND CAS.

* Fig. 103.
152. *Lorſque le triangle* ABC * *n'eſt point rectangle.*

Conſtr. Suppoſez qu'un ſecteur BED d'un grand cercle perpendiculaire au plan de l'arc AC, (c'eſt-à-dire, au ſecteur AEC prolongé s'il eſt néceſſaire,) paſſe par le ſommet de l'angle B qui eſt oppoſé à cet arc.

(d) N. 151.
(e) N. 8.
(f) E. l. 6. p. 16.
Démonſtr. Le triangle ABD eſt rectangle en D [c]. Ainſi (d), le ſinus de l'angle D, (c'eſt-à-dire (e) le ſinus total,) eſt au ſinus de l'angle A, comme le ſinus du côté AB eſt au ſinus du côté BD; & par conſéquent (f), le rectangle

gle fait du sinus total & du sinus du côté BD, est égal au rectangle fait du sinus de l'angle A & du sinus du côté AB. Mais, le même rectangle fait du sinus total & du sinus du côté BD, est aussi égal (*a*) au rectangle fait du sinus de l'angle C & du sinus du côté BC; puisque le triangle DBC étant aussi rectangle en D [c], le sinus de l'angle D, (c'est-à-dire (*b*) le sinus total), est au sinus de l'angle C, comme le sinus du côté BC est au sinus du côté BD (*c*). Donc, le rectangle fait du sinus de l'angle A & du sinus du côté AB, est égal au rectangle fait du sinus de l'angle C & du sinus du côté BC; & par conséquent (*d*), le sinus du côté AB est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A.

(*a*) E. l. 6. p. 16.

(*b*) N. 8.

(*c*) N. 252.

(*d*) E. l. 6. p. 16.

Si l'on suppose ensuite qu'un autre secteur de grand cercle perpendiculaire au plan du côté AB, passe par le sommet de l'angle C qui est opposé à ce côté, on démontrera de la même maniére dont on vient de démontrer la proportion précédente, que le sinus du côté AC est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A.

Enfin, si l'on suppose qu'un troisiéme secteur de grand cercle perpendiculaire au plan du côté BC, passe par le sommet de l'angle A qui est opposé à ce côté, on démontrera de la même maniére dont on vient de le faire à l'égard des côtés & des angles précedents, que le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le

* Fig. 102. & 103.

sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B. Donc dans un triangle-Sphérique quelconque ABC *, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui sont opposés à ces côtés ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

253. Il suit de ce théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des angles au sommet † seront proportionnels aux sinus des compléments des angles sur la base.*

* Fig. 104.

Si dans le triangle-Sphérique ABC *, un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC, le sinus de l'angle ABD sera au sinus de l'angle CBD, comme le sinus du complément de l'angle BAC est au sinus du complément de l'angle BCA.

† Lorsqu'un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles d'un triangle-Sphérique quelconque, est perpendiculaire au côté de ce même triangle qui est opposé à cet angle, l'angle par le sommet duquel ce cercle passe, s'appelle l'*Angle-vertical* : le côté qui est opposé à cet angle, se nomme la *Base* ; les deux autres côtés s'appellent les *Côtés* : les deux autres angles s'appellent les *Angles sur la base* : les parties de la base comprises entre le cercle perpendiculaire & les angles sur la base, se nomment les *Segmens de la base* : enfin, les angles formés par le même cercle perpendiculaire & par les côtés, s'appellent les *Angles au sommet*.

* Fig. 104.

Ainsi dans le triangle ABC *, *l'angle* ABC *est* l'angle vertical : *le côté* AC *est la* base : *les côtés* BA & BC *sont les* côtés : *les angles* BAC & BCA *sont les* angles sur la base : *les parties* AD & CD *du côté* AC, *sont les* segments de la base : & *les angles* ABD & CBD *sont les* angles au sommet.

Constr. Prolongez vers les points H & I, les côtés AB & AC de l'angle BAC ; jusqu'à ce que les arcs AH & AI soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Prolongez de même, vers les points E & F, les côtés CB & CA de l'angle BCA ; jusqu'à ce que les arcs CE & CF soient aussi chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite que les arcs IHG & FEG de deux grands cercles, passent, l'un par les points I & H, & l'autre par les points F & E. Enfin, prolongez vers G l'arc perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'il rencontre les arcs IHG & FEG.

Démonstr. 1^{ent} L'arc IH est la mesure de l'angle BAC (*a*) ; puisque [c] les arcs AH & AI sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle : & l'arc FE est celle de l'angle BCA (*b*) ; puisque [c] les arcs CE & CF sont aussi chacun le quart de la circonférence d'un cercle. (a) N. 196. (b) N. 196.

2^{ent} L'arc IHG est perpendiculaire à l'arc AI (*c*) ; puisque les arcs AH & AI étant, comme on vient de le dire, chacun le quart de la circonférence d'un cercle [c], le point A est l'un des Pôles de cet arc IHG (*d*). Or [H], l'arc DBG est aussi perpendiculaire au même arc AI. Donc, le point G auquel ces arcs IHG & DBG se rencontrent, est l'un des Pôles de cet arc AI (*e*). Ainsi, l'arc IHG est le quart de la circonférence d'un cercle (*f*) ; & par conséquent (*g*), l'arc HG est le complément de l'arc IH ; c'est-à-dire [D 1.], de l'angle BAC. (c) N. 189. (d) N. 193. (e) N. 191. (f) N. 188. (g) N. 20. 1

Pareillement, l'arc FEG est perpendiculaire
(a) N. 189. à l'arc CF (*a*); puisque les arcs CE & CF étant chacun le quart de la circonférence d'un cercle, le point C est l'un des Pôles de cet arc
(b) N. 193. FEG (*b*). Or [H], l'arc DBG est aussi perpendiculaire au même arc CF. Donc, le même point précedent G auquel les arcs FEG & DBG se rencontrent, est aussi l'un des Pôles de l'arc
(c) N. 191. CF (*c*). Ainsi, l'arc FEG est aussi le quart de
(d) N. 188. la circonférence d'un cercle (*d*); & par consé-
(e) N. 20. †. quent (*e*), l'arc EG est le complément de l'arc FE; c'est à-dire [D 1.], de l'angle BCA.
(f) N. 250. 3[ent] Enfin (*f*), le sinus de l'angle GHB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus de l'an-
(g) N. 199. gle GBH ou ABD (*g*), est au sinus du complément HG de l'angle BAC [D 2.]: & le sinus de l'angle GEB est au sinus du même arc BG,
(h) N. 199. comme le sinus de l'angle GBE ou CBD (*h*), est au sinus du complément EG de l'angle BCA [D 2.]. Mais, le sinus de l'angle GHB est égal à celui de l'angle GEB; puisque le point A étant le Pôle de l'arc IHG, de même que le point C est celui de l'arc FEG [D 2.],
(i) N. 189. ces angles sont droits l'un & l'autre (*i*). Donc (*k*),
(k) E. l. 5. p. 11. le sinus de l'angle ABD est au sinus du complément de l'angle BAC, comme le sinus de l'angle CBD est au sinus du complément de l'angle BCA; & par conséquent en échan-
(l) E. l. 5. p. 16. geant (*l*), le sinus de l'angle ABD est au sinus de l'angle CBD, comme le sinus du complément de l'angle BAC est au sinus du complément de l'angle BCA. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

254. Il suit de ce même théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des compléments des segments de la base seront proportionnels aux sinus des compléments des côtés.*

Si dans un triangle-Sphérique ABC *, un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC, le sinus du complément du segment AD sera au sinus du complément du segment CD, comme le sinus du complément du côté BA est au sinus du complément du côté BC. * Fig. 104.

Constr. La même que celle du corollaire précedent (a). (a) N. 253.

Demonstr. 1ent L'arc DI est le complément du segment AD (b); puisque [c] l'arc AI est le quart de la circonférence d'un cercle. Or (c), le même arc DI est aussi la mesure de l'angle DGI ou BGH; puisque par la démonstration du corollaire précedent (d), le point G étant l'un des Pôles de l'arc AI; les arcs IHG & DBG sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (e). Donc, l'angle BGH est le complément du segment AD.

(b) N. 20. †. (c) N. 196. (d) N. 253. (e) N. 188.

Pareillement, l'arc DF est le complément du segment CD (f); puisque [c] l'arc CF est le quart de la circonférence d'un cercle. Or (g), le même arc DF est aussi la mesure de

(f) N. 20. †. (g) N. 196.

l'angle DGF ou BGE ; puisque par la démonstration du corollaire précedent (a), le point G étant aussi l'un des Pôles de l'arc CF, les arcs FEG & DBG sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (b). Donc, l'angle BGE est le complément du segment CD.

(a) N. 253.

(b) N. 188.

2.ent L'arc BH est le complément du côté BA (c) ; puisque [c] l'arc AH est le quart de la circonférence d'un cercle : & l'arc BE est le complément du côté BC (d) ; puisque [c] l'arc CE est aussi le quart de la circonférence d'un cercle.

(c) N. 20. †.

(d) N. 20. †.

3.ent Enfin (e), le sinus de l'angle GHB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus du complément BGH du segment AD [D 1.] est au sinus du complément BH du côté BA [D 2.] : & le sinus de l'angle GEB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus du complément BGE du segment CD [D 1.] est au sinus du complément BE du côté BC [D 2.]. Mais, on a démontré dans le corollaire précedent (f), que le sinus de l'angle GHB est égal à celui de l'angle GEB. Donc (g), le sinus du complément du segment AD est au sinus du complément du côté BA ; comme le sinus du complément du segment CD est au sinus du complément du côté BC ; & par conséquent en échangeant (h), le sinus du complément du segment AD est au sinus du complément du segment CD, comme le sinus du complément du côté BA est au sinus du complément du côté BC. Donc, C. Q. F. D.

(e) N. 250.

(f) N. 253.

(g) E. l. 5. p. 11.

(h) E. l. 5. p. 16.

PROPOSITION II. Théorême.

255. *Dans un triangle-Sphérique rectangle, le sinus total est au sinus de l'un quelconque des côtés qui forment l'angle droit, comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à celle du côté opposé à cet angle.*

Dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le sinus total est au sinus du côté AC, comme la tangente de l'angle C est à celle du côté AB: & le sinus total est au sinus du côté AB, comme la tangente de l'angle B est à celle du côté AC. *Fig. 105.

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur la surface de sa Sphére, tracez (a) sa projection DEF, sur celui des grands cercles de cette Sphére auquel la commune section TC des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C, est perpendiculaire. Prolongez de part & d'autre le côté FD de cette projection, jusqu'à ce qu'il rencontre en des points G & O la circonférence GPOQ de ce cercle. Des points G, D & F, élevez au diamétre GO les perpendiculaires GX, DI & PQ (b). Prolongez de part & d'autre le côté FE, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point S, la circonférence précédente; & en des points X & I, les perpendiculaires GX & DI. Par le point E commun aux côtés FE & DE, tirez (c) la paralléle RK au diamétre GO. Des points K & E, abbaissez au même diamétre GO (d) les perpendiculaires KM & EN. Du point F, tirez par le point K la ligne FV, qui

(a) N. 248.
(b) E. l. 1. p. 11.
(c) E. l. 1. p. 31.
(d) E. l. 1. p. 12.

rencontre en un point V la perpendiculaire GX. Enfin, prolongez de part & d'autre le côté
(a) N. 248. DE (a), jusqu'à ce qu'il rencontre en des points P & Q, le diamétre PQ.

Démonstr. Premiérement, la ligne GF est le
(b) N. 8. sinus total (b), puisqu'elle est [c] le rayon du cercle GPOQ : & la ligne DF est le sinus du côté AC, par une démonstration pareille à celle dont on s'est servi dans la proposition pré-
(c) N. 251. cédente (c), pour démontrer que la ligne EF est le sinus du côté BC.

Secondement, on démontre aussi de la même maniére dont on l'a fait dans la proposition
(d) N. 251. précédente (d), que l'angle GFX est l'inclinaison des plans des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C. Ainsi, puisque la ligne GX qui [c] est perpendiculaire au diamétre GO,
(e) N. 38. est la tangente de cet angle GFX (e), elle est aussi celle de l'angle C.

(f) N. 247. † *Troisiémement*, FG : RK : : FD : RE (f); puisque les lignes FG & RK qui [c] sont perpendiculaires chacune au diamétre PQ, sont les ordonnées du demi-cercle PGQ qui correspondent aux ordonnées FD & RE de la demi-
(g) E. l. 1. p. 34. Ellipse PDQ. Ainsi, puisque (g) FM est égale à RK, & FN à RE, FG : FM : : FD : FN.
(h) E. l. 6. p. 4. Or (h), FG : FM : : GV : MK; puisque (i) les triangles FGV & FMK qui [c] sont rectangles
(i) E. l. 1. p. 32. l'un en G & l'autre en M, & qui ont l'angle F
(k) E. l. 5. p. 11. commun, sont équiangles. Donc (k), FD : FN : :
(l) E. l. 6. p. 4. GV : MK. Mais (l), FD : FN : : DI : NE; puisque

puisque (a) les triangles FDI & FNE, qui [c] sont rectangles l'un en D & l'autre en N, & qui ont l'angle F commun, sont aussi équiangles. (a) E. l. 2. p. 32.
Donc (b), GV : MK :: DI : NE. Ainsi, puisque (c) MK est égale à NE, GV est égale à DI (d); & par conséquent, puisque GV qui [c] est perpendiculaire au diamétre GO, est la tangente de l'arc GK (e), & que par la même démonstration que l'on a faite dans la proposition précédente (f), l'arc GK est égal à l'arc AB, la ligne DI est la tangente de cet arc AB. (b) E. l. 5. p. 11 (c) E. l. 1. p. 34. (d) E. l. 5. p. 14. (e) N. 38. (f) N. 251.
Quatriémement enfin (g), les triangles GXF & DIF sont équiangles; puisque [c] ils sont rectangles l'un en G & l'autre en D, & que l'angle F leur est commun. Ainsi (h), GF : DF :: GX : DI. Or, GF est le sinus total [D 1.] : DF est le sinus du côté AC [D 1.] : GX est la tangente de l'angle C [D 2.] : & DI est celle du côté AB [D 3.]. Donc, &c. (g) E. l. 2. p. 32. (h) E. l. 6. p. 4.
Si l'on trace ensuite la projection du même triangle ABC, sur celui des grands cercles de la même Sphére, auquel la commune section TB des secteurs ATB ou BTC qui forment l'angle B, est perpendiculaire, on démontrera de la même maniére dont on vient de démontrer la proportion précédente, que le sinus total est au sinus du côté AB, comme la tangente de l'angle B est à celle du côté AC. Ainsi, dans le triangle-Sphérique rectangle ABC, le sinus total est au sinus de l'un quelconque des côtés qui forment l'angle droit A, comme la tangente

de l'angle adjacent à ce côté est à celle du côté qui est opposé à cet angle ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

256. IL suit de ce théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des compléments des angles au sommet seront proportionnels aux tangentes des compléments des côtés.*

*Fig. 106. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC, le sinus du complément de l'angle ABD sera au sinus du complément de l'angle CBD, comme la tangente du complément du côté BA est à celle du complément du côté BC.

Constr. Prolongez vers les points E & F, les côtés BA & BC du triangle ABC, jusqu'à ce que les arc BE & BF soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite, que la circonférence d'un grand cercle passe par les points E & F. Enfin, prolongez de part & d'autre le côté AC, jusqu'à ce qu'il rencontre cette circonférence en des points G & H ; & prolongez aussi l'arc perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point I, cette même circonférence.

Démonstr. 1ent le point B est l'un des Pôles (a) N. 193. de l'arc GIH (a) ; puisque [c] les arcs BE

& BF ſont chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Ainſi (*a*), l'arc BDI eſt auſſi le quart de la circonférence d'un cercle ; & par conſéquent (*b*), l'arc EI eſt la meſure de l'angle ABD ; & l'arc IF eſt celle de l'angle CBD. (*a*) N. 188. (*b*) N. 196.

2ent L'arc BDI eſt perpendiculaire à l'arc GIH (*c*) ; puiſque l'on vient de démontrer que le point B eſt l'un des Pôles de ce dernier arc. Or [*H*], le même arc BDI eſt auſſi perpendiculaire à l'arc GDH. Donc (*d*), les points G & H auſquels ces arcs GIH & GDH ſe rencontrent, ſont les Pôles de cet arc BDI. Ainſi (*e*), les arcs IEG & IFH ſont chacun le quart de la circonférence d'un cercle ; & par conſéquent (*f*), l'arc EG eſt le complément de l'arc EI, c'eſt-à-dire, de l'angle ABD [D 1.] : & l'arc FH eſt le complément de l'arc IF, c'eſt-à-dire, de l'angle CBD [D 1.]. (*c*) N. 189. (*d*) N. 191. (*e*) N. 188. (*f*) N. 20.†

3ent L'arc AE eſt le complément du côté BA (*g*) ; puiſque [c] l'arc BE eſt le quart de la circonférence d'un cercle : & l'arc CF eſt le complément du côté BC (*h*) ; puiſque [c] l'arc BF eſt auſſi le quart de la circonférence d'un cercle. (*g*) N. 20.† (*h*) N. 20.†

4ent Enfin, le triangle EAG eſt rectangle en E (*i*) ; puiſque l'on vient de démontrer que le point B eſt l'un des Pôles de l'arc GIH. Ainſi (*k*), le ſinus total eſt à la tangente de l'angle G, comme le ſinus du complément EG de l'angle ABD [D 2.] eſt à la tangente du complément AE du côté BA [D 3.]. Pareillement, le trian- (*i*) N. 189. (*k*) N. 255.

gle FCH est rectangle en F, par la même raison
(a) N. 255. que le triangle EAG l'est en E. Ainsi (a), le sinus total est à la tangente de l'angle H, comme le sinus du complément FH de l'angle CBD [D 2.] est à la tangente du complément CF du côté BC [D 3.]. Mais, la tangente de l'angle G est égale à celle de l'angle H; puis-
(b) N. 197. que (b) ces angles qui sont opposés, & dont les côtés GIH & GDH sont chacun la moitié de la circonférence d'un grand cercle [D 2.], sont
(c) E. l. 5. p. 11. égaux. Donc (c), le sinus du complément de l'angle ABD est à la tangente du complément du côté BA, comme le sinus du complément de l'angle CBD est à la tangente du complément du côté BC; & par conséquent en échan-
(d) E. l. 5. p. 16. geant (d), le sinus du complément de l'angle ABD est au sinus du complément de l'angle CBD, comme la tangente du complément du côté BA est à la tangente du complément du côté BC. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

257. Il suit aussi de ce même théorême, que *si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des Segments de la base seront réciproquement proportionnels aux tangentes des angles sur la base.*

* Fig. 107. Si dans le triangle-Sphérique ABC*, un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC,

le sinus du segment AD sera au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à celle de l'angle A.

Démonstr. Le triangle ABD est rectangle en D [H]. Ainsi (a) le sinus total est au sinus du segment AD, comme la tangente de l'angle A est à celle de l'arc BD; & par conséquent (b), le rectangle fait du sinus total & de la tangente de l'arc BD, est égal au rectangle fait du sinus du segment AD & de la tangente de l'angle A. Mais (c), le même rectangle fait du sinus total & de la tangente de l'arc BD, est aussi égal au rectangle fait du sinus du segment CD & de la tangente de l'angle C; puisque le triangle CBD étant aussi rectangle en D [H], le sinus total est au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à celle de l'arc BD (d). Donc, le rectangle fait du sinus du segment AD & de la tangente de l'angle A, est égal au rectangle fait du sinus du segment CD & de la tangente de l'angle C; & par conséquent (e), le sinus du segment AD est au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à la tangente de l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

(a) N. 255.
(b) E. l. 6. P. 16.
(c) E. l. 6. P. 16.
(d) N. 255.
(e) E. l. 6. P. 16.

PROPOSITION III. Théorême.

258. *Dans un triangle-Spherique, le rectangle fait des sinus de deux côtés quelconques, est au rectangle fait des sinus des differences de ces deux mêmes côtés à la moitié de la somme des trois côtés, comme le quarré du sinus total est à celui du sinus*

de la moitié de l'angle compris par ces deux premiers côtés.

* Fig. 108. 109 & 110. Dans le triangle-Sphérique ABC*, le rectangle fait des sinus des côtés, par exemple AC & AB, est au rectangle fait du sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & CB, & du sinus de la différence du côté AB à cette même moitié, comme le quarré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle A.

L'angle A *peut être droit* (fig. 108.) *aigu* (fig. 109.) *ou obtus* (fig. 110.). *Ainsi, ce théorême a trois cas, que nous allons démontrer chacun en particulier, après la construction suivante qui est pour tous les cas.*

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur (a) N. 248. la surface de sa Sphére, tracez (*a*) sur le plan du secteur AgC, (c'est-à-dire, sur celui des grands cercles de cette Sphére, dont le secteur AgC est une partie DGF,) les projections DE † & FE des côtés AB & CB. Tirez des extrémités D & F de l'arc AC ou DF, les (b) E. l. 1. p. 11. & 12. diamétres DH & FI. Tirez ensuite (*b*) du point E, la perpendiculaire VL au diamétre DH, & la perpendiculaire EN au diamétre FI. Du point L tirez au point N, la ligne LN; & à (c) E. l. 1. p. 12. la ligne EN, la perpendiculaire LP (*c*). Faites (d) E. l. 3. p. 30. l'arc NX égal à l'arc DL. Divisez (*d*) l'arc

† Trois des points de la figure 108 sont marqués chacun par deux lettres; afin que la même construction puisse servir pour tous les cas.

DFNX en deux parties égales DZ & ZX. Du centre G, tirez au point Z le rayon GZ. Abbaissez du point F, la perpendiculaire FM au diamétre DH, & la perpendiculaire FQ au rayon GZ (*a*). Tirez (*b*) le diamétre *b*K perpendiculaire au diamétre DH. Prolongez (*c*) les projections DE & FE, jusqu'à ce qu'elles rencontrent en des points H & I, les diamétres DH & FI. Du point T auquel la projection DE va couper le diamétre *b*K, élevez à ce diamétre (*d*) la perpendiculaire TR. Tirez du point R au point K, la ligne RK. Du centre G, abbaissez (*e*) le rayon GY perpendiculaire à cette ligne RK. Enfin (*f*), tirez (*dans la Figure* 108,) du point L au diamétre *b*K, la perpendiculaire L*c*; & (*dans les Figures* 109, *&* 110,) du point R au diamétre DH, la perpendiculaire R*a*.

(*a*) E. l. 1. p. 12.
(*b*) E. l. 1. p. 11.
(*c*) N. 248.
(*d*) E. l. 1. p. 11.
(*e*) E. l. 1. p. 12.
(*f*) E. l. 1. p. 12.

PREMIER CAS.

Démonstr. Premiérement, l'arc DF * est égal à l'arc AC [c]. Ainsi, puisque (*g*) la ligne MF qui [c] est perpendiculaire au diamétre DH, est le sinus de l'arc DF, elle est aussi celui de l'arc AC.

* Fig. 108.
(*g*) N. 7.

Secondement, si l'arc DK qui [c] est le quart de la circonférence du cercle *b*HKD, étoit vû parallelement au rayon GK qui le termine par son extrémité K, sa projection seroit le rayon DG ou DT (*h*); puisque (*i*) le sinus du quart de la circonférence d'un cercle est un rayon de ce même cercle : & la projection de la partie

(*h*) N. 246.
(*i*) N. 8.

(a) N. 246. LK de ce même arc, seroit (a) la partie VG
(b) E. l. 1. p. 34. ou ET de ce rayon; puisque (b) cette partie ET est égale à la ligne Lc perpendiculaire [c] au
(c) N. 7. diametre bK, & par conséquent (c), sinus de cette partie LK. Ainsi, l'autre partie DV ou DE de ce même rayon, est la projection de l'autre partie DL de ce même arc. Or [c], cette même partie DE est aussi la projection de l'arc AB. Donc, l'arc DL est égal à l'arc AB; &
(d) N. 7. par conséquent, puisque (d) la ligne VL qui [c] est perpendiculaire au diametre DH, est le sinus de l'arc DL, elle est aussi celui de l'arc AB.

Troisiémement, l'arc FE de la demi-Ellipse FEI, est la projection de l'arc FN du demi-
(e) N. 247. cercle FNI (e); puisque [c] le point F est celui auquel les circonférences de cette demi-Ellipse & de ce demi-cercle rencontrent leur diametre commun FI, & que la ligne dE perpendiculaire [c] à ce diametre, est l'ordonnée de cette même demi-Ellipse, qui correspond à l'ordonnée dN de ce même demi-cercle. Or [c], ce même arc FE est aussi la projection de l'arc CB. Donc, l'arc FN est égal à l'arc CB. Ainsi, puisque [c] l'arc DF est égal à l'arc AC, & que [c] l'arc NX l'est à l'arc DL qui vient d'être démontré égal à l'arc AB [D 2.]; l'arc DFNX qui est la somme de ces trois arcs DF, FN, & NX, est aussi celle des trois côtés AC, CB, & AB. Mais, l'arc DZ est [c] la moitié de cet arc DFNX, l'arc FZ est la difference de l'arc DF à cet arc DZ, & l'arc LZ est celle de l'arc

DL

DL à ce même arc DZ. Donc, l'arc FZ est la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB, l'arc LZ est celle du côté AB à cette même moitié; & par conséquent, puisque (a) la ligne FQ qui est perpendiculaire [c] au rayon GZ, est le sinus de l'arc FZ, & que la ligne LO qui est perpendiculaire (b) au † même rayon GZ, est le sinus de l'arc LZ, la ligne FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB, & la ligne LO est le sinus de la différence du côté AB à cette même moitié. (a) N. 7. (b) E. l. 3 P. 3.

Quatriémement, l'arc KYR est [c] le quart de la circonférence du cercle *b*HKD; ainsi il est la mesure de l'angle A, puisque [*H*] cet angle est droit. Or, l'arc KY est la moitié de l'arc KYR; puisque le rayon GY qui [c] est perpendiculaire à la corde KR, divise cette corde (c) en deux parties égales KS & SR; & par conséquent aussi (d) l'arc KYR en deux parties égales KY & YR. Donc, l'arc KY est la mesure de la moitié de l'angle A; & par conséquent, puisque (e) la ligne KS qui [c] est perpendiculaire au rayon GY, est le sinus de l'arc KY, elle est aussi celui de la moitié de l'angle A. (c) E. l. 3. P. 3. (d) E. l. 3. P. 30. (e) N. 7.

Cinquiémement enfin (f), les triangles MGF & PEL sont équiangles; puisque [c] ils sont rectangles, l'un en M & l'autre en P, & que (f) E. l. 1. P. 32.

† Le rayon GZ divise l'arc LZN en deux parties égales; puisque [c] DZ est égal à ZX, & DL à NX.

les lignes FM & LE étant perpendiculaires chacune [c] à la même ligne DH, & les lignes FG & LP l'étant aussi chacune [c] à la même li-
(a) E. l. 11. p. 10. gne EN, les angles MFG & PLE sont égaux (a).
(b) E. l. 6. p. 4. Ainsi (b), MF : GF ou GK : : LP : EL. Or, VL : GK : : EL : TK; puisque les lignes VL & EL ne sont qu'une même ligne, de même que les lignes GK & TK. Donc, si l'on multiplie chaque terme de la premiére de ces deux proportions, par chaque terme correspon-
(c) E l. 6. p. 22. dant de la seconde, on aura (c) cette nouvelle proportion; le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de LP & de EL est au rectangle fait de EL
(d) E. l. 6. p. 1. & de TK; & par conséquent (d), comme LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur EL.

Mais, LP est à TK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS. Car
(e) E. l. 1. p. 32. 1° (e), les triangles FGQ & LNP sont équiangles; puisque [c] ils sont rectangles, l'un en Q & l'autre en P, & que les lignes FG & LP étant perpendiculaires chacune [c] à la même ligne EN, & les lignes FQ & LN l'étant aussi l'une [c] & l'autre [D] à la même ligne GZ, les angles
(f) E. l. 11. p. 10. GFQ & PLN sont égaux (f). 2° Les triangles SGK & TRK sont aussi équiangles; puisque [c] ils sont rectangles, l'un en S & l'autre en T, &
(g) E. l. 6. p. 4. que l'angle K leur est commun. Ainsi (g), 1° FQ : FG : : LP : LN; 2° KS : KG ou FG : : TK :
(h) E. l. 6. p. 16. KR. Donc (h), 1° le rectangle fait de FQ

& de LN est égal au rectangle fait de FG & de LP : 2° le rectangle fait de KS & de KR est égal au rectangle fait de FG & de TK ; & par conséquent, le rectangle fait de FQ & de LN est au rectangle fait de KS & de KR, comme le rectangle fait de FG & de LP est au rectangle fait de FG & de TK. Mais (a), LO est la moitié de LN, & KS est la moitié de KR. Donc (b), le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS, comme le rectangle fait de FG & de LP est au rectangle fait de FG & de TK ; & par conséquent (c), comme LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur FG.

(a) E. l. 3. p. 3.
(b) E. l. 5. p. 15.
(c) E. l. 6. p. 1.

Donc (d), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS ; & par conséquent en échangeant (e), le rectangle fait de MF & de VL est au rectangle fait de FQ & de LO, comme le quarré de GK est au quarré de KS.

(d) E. l. 5. p. 11.
(e) E. l. 5. p. 16.

Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.] VL est le sinus du côté AB [D 2.] : FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC [D 3.] : LO est le sinus de la différence du côté AB à la même moitié [D 3.]. GK est le sinus total (f) : & enfin, KS est le sinus de la moitié de l'angle A [D 4.]. Donc, le rectangle fait des sinus des côtés AC & AB est au rectangle fait &c. & par conséquent, C. Q. F. 1° D.

(f) N. 8.

SECOND CAS.

Démonstr. Premiérement, on démontre que
* Fig. 109. la ligne MF * est le sinus de l'arc AC, de la même maniére dont on l'a fait dans la premiére partie de la démonstration précédente.

Secondement; l'arc DE de la demi-Ellipse DTH est la projection de l'arc DL du demi-
(a) N. 147. cercle DKH (*a*); puisque [c] le point D est celui auquel les circonférences de cette demi-Ellipse & de ce demi-cercle rencontrent leur diamétre commun DH; & que la ligne VE qui [c] est perpendiculaire à ce diamétre, est l'ordonnée de cette même demi-Ellipse, qui correspond à l'ordonnée VL de ce même demi-cercle. Or [c], le même arc DE est aussi la projection de l'arc AB. Donc, l'arc DL est
(b) N. 7. égal à l'arc AB; & par conséquent, puisque (*b*) la ligne VL qui [c] est perpendiculaire au diamétre DH, est le sinus de l'arc DL, elle est aussi celui de l'arc AB.

Troisiémement, on démontre que la ligne FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB; & la ligne LO, le sinus de la différence du côté AB à cette même moitié, en appliquant à cette figure, la troisiéme partie de la démonstration précédente.

Quatriémement, l'angle A est aigu [*H*].
(c) N. 195. Ainsi (*c*), il est égal à l'inclinaison du plan de l'arc AB au plan de l'arc AC; c'est-à-dire, à l'inclinaison du demi-cercle dont le secteur

AgB fait partie, au cercle dont le secteur AgC fait aussi partie, lequel [c] est le cercle bHKD. Or (*a*), la ligne GT est le sinus du complément de cette inclinaison; puisqu'elle est la moitié du petit axe de la demi-Ellipse DTH qui [c] est la projection de ce demi-cercle sur le cercle bHKD. Donc, la ligne GT est le sinus du complément de l'angle A. Mais, cette même ligne GT est aussi le sinus du complément de l'arc KYR; puisque (*b*) elle est égale à la ligne aR perpendiculaire [c] au diamétre DH, & par conséquent (*c*) sinus de l'arc RH qui est le complément de cet arc KYR. Donc, (*d*) l'arc KYR est la mesure de l'angle A; & par conséquent, puisque l'on démontre de la même maniére dont on l'a fait dans la quatriéme partie de la démonstration précédente, que l'arc KY est la moitié de l'arc KYR, & que la ligne KS est le sinus de l'arc KY, la ligne KS est le sinus de la moitié de l'angle A.

(a) N. 247.
(b) E. I. 1. P. 33.
(c) N. 7.
(d) N. 20. †

Cinquiémement enfin, on démontre aussi de la même maniére dont on l'a fait dans la cinquiéme partie de la démonstration précédente, que MF : GF ou GK : : LP : EL. Or (*e*), VL : GK : : EL : TK; puisque (*f*) les lignes VL & GK étant les ordonnées du demi-cercle DKH qui correspondent aux ordonnées VE & GT de la demi-Ellipse DTH, VL : GK : : VE : GT. Donc (*g*), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de LP & de EL est au rectangle fait de EL &

(e) E. I. 5. P. 19.
(f) N. 247 †.
(g) E. I. 6. P. 22.

(a) E. l. 6. p. 1. de TK ; & par conséquent (*a*), comme LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur EL.

Mais, en appliquant à cette figure 109 ce qui est dit dans la cinquiéme partie de la démonstration précédente, on fait voir que LP est à TK, comme le rectangle fait de FQ & (b) E. l. 5. p. 11. de LO est au quarré de KS. Donc (*b*), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS ; & par conséquent en (c) E. l. 5. p. 16. échangeant (*c*), le rectangle fait de MF & de VL est au rectangle fait de FQ & de LO, comme le quarré de GK est au quarré de KS. Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.] : VL est le sinus du &c. Donc, &c. & par conséquent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÉME CAS.

Démonstr. *Premiérement*, en appliquant à la figure 110 ce qui est dit dans les trois premiéres parties de la démonstration précédente, on démontre 1°, que la ligne MF est le sinus de l'arc AC : 2°, que la ligne VL est le sinus de l'arc AB : 3° enfin, que la ligne FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & CB ; & la ligne LO, le sinus de la différence du côté AB à cette même moitié.

(d) N 195. *Secondement*, l'angle A est obtus [H]. Ainsi (*d*), il est égal au supplément de l'inclinaison du plan de l'arc AB au plan de l'arc AC. Or, on

démontre que l'arc *b*R est la mesure de cette inclinaison, de la même maniére dont on a démontré dans la quatriéme partie de la démonstration précédente, que l'arc KYR * est la mesure de l'angle A dont il s'agit dans ce cas: & (*a*) l'arc KYR * est le supplément de l'arc *b*R. Donc, l'arc KYR est la mesure de l'angle A; & par conséquent, puisque l'on démontre aussi de la même maniére dont on l'a fait dans la quatriéme partie de la même démonstration précédente, que l'arc KY est la moitié de l'arc KYR, & que la ligne KS est le sinus de l'arc KY, la ligne KS est le sinus de la moitié de l'angle A. * Fig. 109. (*a*) N. 6. †. * Fig. 100.

Troisiémement enfin, on démontre aussi de la même maniére dont on l'a fait dans la cinquiéme partie de la même démonstration précédente, que MF : GF ou GK : : LP : EL. Or (*b*), VL : GK : : EL : TK; puisque (*c*) VL & GK étant les ordonnées du demi-cercle DKH qui correspondent aux ordonnées VE & GT de la demi-Ellipse DTH, VL : VE : : GK : GT. Donc (*d*), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de LP & de EL est au rectangle fait de EL & de TK; & par conséquent (*e*), comme LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur EL. (*b*) E. l. 5. P. 18. (*c*) N. 247. † (*d*) E. l. 6. P. 22. (*e*) E. l. 6. P. 1.

Mais, en appliquant à cette même figure 110 ce qui est dit dans la cinquiéme partie de la démonstration précédente, on fait voir que

LP est à TK, comme le rectangle fait de FQ (a) E. l. 5. p. 11. & de LO est au quarré de KS. Donc (a), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS; & par conséquent (b) E. l. 5. p. 16. en échangeant (b), le rectangle fait de MF & de VL est au rectangle fait de FQ & de LO, comme le quarré de GK est au quarré de KS. Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.]: VL est le sinus du &c. Donc, &c. & par conséquent, C. Q. F. 3° D.

Donc, C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Des Problêmes de la Trigonométrie-Sphérique.

259. IL s'agit à présent de faire voir comment on doit se servir des Principes que nous venons d'établir, pour *résoudre* un triangle-Sphérique quelconque; c'est-à-dire, pour trouver les parties inconnues de tel triangle-Sphérique que ce puisse être, dont *trois* quelconques des *six* parties que l'on peut y considérer, sont connues. Mais, comme on ne peut parvenir à résoudre la plus grande partie de ceux de ces triangles qui sont obliquangles, qu'en les comparant à des triangles-rectangles, nous divisons ce chapitre en deux articles; dont le premier contient la résolution des triangles-Sphériques rectangles;

rectangles ; & le dernier, celle des triangles-Sphériques obliquangles.

ARTICLE PREMIER.

De la résolution des triangles-Sphériques rectangles.

260. Lorsqu'il faut trouver quelqu'une des parties inconnues de tel triangle que ce soit, il y a toujours quatre des six parties que l'on peut considérer dans ce triangle qui sont *Usuelles*, c'est-à-dire, qui entrent dans le problême; sçavoir, les trois parties connues, & la partie que l'on cherche : & si ce même triangle est rectangle, l'une de ces quatre parties, sçavoir l'angle droit, est *constante ;* & les trois autres sont *variables*. Or, si lorsqu'il s'agit d'un triangle rectangle, on considere l'angle droit comme n'interrompant point la contiguité des autres parties, *deux seulement des parties variables de ce triangle sont de suite*, ou *toutes le sont*. Ainsi, l'on peut réduire tous les problêmes qui concernent la résolution des triangles-Sphériques rectangles, aux deux suivans, qui dépendent, l'un de la premiére proposition du chapitre précedent (a), & l'autre de la seconde (b). (a) N. 250. (b) N. 255.

Mais, comme on ne peut constituer aucune des proportions démontrées dans cette premiére proposition, qu'avec les sinus des parties opposées les unes aux autres ; ni aucune des proportions

démontrées dans cette seconde proposition, qu'avec les sinus & les tangentes des côtés adjacents à l'angle droit, on ne peut opérer immédiatement que sur les triangles dans lesquels *les parties usuelles sont opposées les unes aux autres*; & sur ceux dont *les côtés adjacents à l'angle droit sont des parties usuelles*. Ainsi, chacun de ces problêmes a deux cas.

PROBLESME I.

261. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique rectangle, dont il n'y a que deux des parties variables qui soient de suite.*

PREMIER CAS.

Lorsque les parties usuelles sont opposées les unes aux autres.

262. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AC *de* 41 *deg.* 12 *min. avec l'hypoténuse* BC *de* 59 *deg.* 17 *min. & il faut trouver l'angle* B.

* Fig. 111.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, l'hypoténuse BC, & l'angle demandé B. De plus, les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, le côté AC, l'hypoténuse BC, & l'angle demandé B,) sont opposées les unes aux autres. Ainsi (a), *le sinus de l'hypoténuse* BC *est au sinus du côté* AC, *comme le sinus de l'angle* A *est au sinus de l'angle* B. Par conséquent, on

(a) N. 250.

trouvera cet angle B (*a*), de la maniére suivante. (*a*) N. 110.

Complément du logarithme du sinus de l'hypoténuse BC *donnée de* 59 *deg.* 17 *m.* - - - 0.0656512
Logarithme du sinus du côté AC *donné de* 41 *deg.* 12 *m.* - - - - - - - - - - - - - - 9.8186807

Logarithme du sinus de l'angle demandé B - - - 9.8843319
qui (*b*) donnera 50 deg. 0 m. 16 s. *p. m.* pour la valeur de cet angle ; lequel est aigu (*c*), puisque le côté AC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donneroit 129 deg. 59 min. 44 s. *p. p.* pour la valeur de ce même angle (*d*), si ce même côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle. (*b*) N. 103. (*c*) N. 224. (*d*) N. 225.

AUTRE EXEMPLE.

263. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *l'hypoténuse* BC *de* 67 *deg.* 28 *min. avec l'angle* C *de* 51 *deg.* 44 *min. & il faut trouver le côté* AB. * Fig. 112.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont aussi de suite ; sçavoir, l'hypoténuse BC, & l'angle C. De plus, les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, l'angle C, l'hypoténuse BC, & le côté demandé AB,) sont aussi opposées les unes aux autres. Ainsi (*e*), *le sinus de l'angle* A *est au sinus de l'angle* C, *comme le sinus de l'hypoténuse* BC *est au sinus du côté* AB. Par conséquent, on trouvera ce côté AB (*f*), de la maniére suivante. (*e*) N. 250. (*f*) N. 105.

Logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 51 *deg.* 44 *m.* - - - - - - - - - - - - - - - 9.8949453
Logarithme du sinus de l'hypoténuse BC *donnée de* 67 *deg.* 28 *m.* - - - - - - - - - - - 9.9655106

Logarithme du sinus du côté demandé AB - - 19.8604559
qui (*g*) donnera 46 d. 29 m. 53 s. *p. p.* pour la valeur de ce côté ; (*g*) N. 103.

lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cer-
(a) N. 228. cle (a), puisque l'angle C est aigu : mais, qui donneroit 133 deg.
(b) N. 229. 30 min. 7 sec. p. m. pour la valeur de ce même côté (b), si ce même angle étoit obtus.

AUTRE EXEMPLE.

264. *Enfin, on donne dans le triangle*
* Fig. 113. *Sphérique* ABC* *qui est rectangle en* A, *l'angle* C *de* 57 *deg.* 34 *min. avec le côté* AB *de* 42 *deg.* 57 *min. & il faut trouver l'hypoténuse* BC.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont encore de suite ; sçavoir, l'angle C, & l'hypoténuse demandée BC. De plus, les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, l'angle C, l'hypoténuse demandée BC, & le côté AB,) sont encore
(c) N. 250. opposées les unes aux autres. Ainsi (c), *le sinus de l'angle* C *est au sinus de l'angle* A, *comme le sinus du côté* AB *est au sinus de l'hypoténuse* BC. Par conséquent, on trouvera cette hypoténuse,
(d) N. 110. (d) de la maniére suivante.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 57 *deg.* 34 *m.* - - - - - - - -	0.0736493
Logarithme du sinus du côté AB *donné de* 42 *deg.* 57 *min.* - - - - - - - - - - - - - -	9.8333766
Logarithme du sinus de l'hypoténuse demandée BC	9.9070259

(e) N. 103. qui (e) donnera 53 deg. 49 min. 7 s. *p. p.* pour la valeur de
(f) N. 233. & 240. cette hypoténuse (f), lorsque l'angle B sera aigu, ou lorsque le côté AC vaudra moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donneroit 126 deg. 10 min. 53 sec. *p. m.*
(g) N. 233. & 240. pour la valeur de cette même hypoténuse (g), si l'angle B étoit obtus, ou si le côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

SCHOLIE.

265. *Lorsque l'on propose en géneral la résolution du triangle-Sphérique* ABC * *comme on* * Fig. 113.
le fait ici, il y a une ambiguité; puisque pour déterminer la valeur de l'hypoténuse BC, *il faut sçavoir de quelle espece est l'angle* B *ou le côté* AC, *& que cette espece est inconnue. Mais cette ambiguité disparoît lorsque ce triangle est appliqué à une question astronomique; parce qu'il y a toujours alors quelqu'une des circonstances de la question qui fait connoître cette espece, comme on le verra dans les Usages que nous donnerons à la fin de ce Traité. Or, il en est de même de tous les cas dans lesquels il se rencontre quelque ambiguité.*

SECOND CAS.

Lorsque les parties usuelles ne sont point opposées les unes aux autres.

266. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AB *de* 28 *d.* * Fig. 114.
35 *min. avec le côté* AC *de* 39 *deg.* 58 *min. & il faut trouver l'hypoténuse* BC.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, le côté AB, & le côté AC (*a*). Cependant, comme les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, le côté AB, le côté AC, & l'hypoténuse demandée BC,) ne sont point opposées les unes aux autres, on ne peut former immédiatement avec les sinus de ces parties, aucune des proportions démontrées au N° 250. Mais,

(*a*) N. 260.

en prolongeant vers les points D & E, le côté BA, & l'hypoténuse BC, jusqu'à ce que les arcs BD & BE soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle; & en supposant ensuite qu'un arc d'un grand cercle qui passe par ces points D & E, rencontre en un point F le côté AC prolongé aussi vers ce point, on a un autre triangle ECF, dont les parties usuelles, (qui sont l'angle droit E †, l'angle F dont le complément AD du côté donné AB est la mesure, le complément CF du côté donné AC, & le complément CE de l'hypoténuse demandée BC,) sont rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi:

Logarithme du sinus de l'angle F *qui est le complément du côté* AB *donné de 28 deg. 35 m.*	9.9435549
Logarithme du sinus du complément CF *du côté* AC *donné de 39 deg. 58 m.*	9.8844659
Logarithme du sinus du complément CE *de l'hypoténuse demandée* BC - - - - - - - - -	19.8280208

(a) N. 103. qui (a) donne 42 d. 17 m. 59 f. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 47 deg. 42 min. 1 sec. pour celle de cette hypoténuse.

* Fig. 114. † On démontre dans le triangle ECF *, que l'angle E est droit: que l'arc CF est le complément de l'arc AC: que l'arc AD est le complément de l'arc AB, & la mesure de l'angle F: que l'arc CE est le complément de l'hypoténuse BC: que l'arc DE est la mesure de l'angle B: que l'arc EF est le complément de cet arc DE: enfin, que l'angle ECF est égal à l'angle BCA; en appliquant à cette figure une démonstration pareille à celle du N° 256: Et il en sera de même de tous les triangles que nous serons obligés de former dans la suite, par les prolongemens des côtés d'un premier triangle.

SCHOLIE.

267. *Dans le triangle* ABC * *que nous venons de proposer, chaque côté* AB *&* AC *est plus petit que le quart de la circonférence d'un cercle. Mais, souvent les côtés d'un triangle-Sphérique valent, l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins; ou chacun plus que le quart de la circonférence d'un cercle.* * Fig. 114.

268. *Or* 1ent, *si les côtés d'un triangle-Sphérique-rectangle valent l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins, si par exemple, dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AB *est de* 129 *deg.* 18 *min. & le côté* AC *de* 47 *deg.* 23 *min. l'hypoténuse* BC *vaudra aussi plus que le quart de la circonférence d'un cercle* (a). *Ainsi, l'on pourra prendre sur ce côté* AB, *& sur cette hypoténuse* BC, *des arcs* BD *&* BE *égaux chacun au quart de la circonférence d'un cercle. Or, si l'on suppose ensuite qu'un arc d'un grand cercle passe par les points* D *&* E, *& rencontre en un point* F *le côté* AC *prolongé vers ce point, on aura un triangle* CEF, *dont les parties usuelles, (qui* (b) *seront l'angle droit* E, *l'angle* F *dont le complément* † DA *du côté donné* AB *est la mesure, le complément* CF *du côté donné* AC, *& le complément* EC *de l'hypoténuse demandée* BC,) * Fig. 115. (a) N. 236. (b) N. 266. †

† Cet excès d'un arc sur le quart de la circonférence d'un cercle, s'appelle aussi le *Complément* de cet arc.

se trouveront rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263 ; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Logarithme du sinus de l'angle F qui est le complément du côté AB donné de 129 deg. 18 m.	9.8016649
Logarithme du sinus du complément CF du côté AC donné de 47 deg. 23 min. - - - -	9.8306464
Logarithme du sinus du complément EC de l'hypoténuse demandée BC - - - - - - - - - -	19.6323113

(a) N. 103. *qui* (a) *donne* 25 *d.* 23 *m.* 41 *sec.* p. p. *pour la valeur de ce complément ; & par conséquent*, 115 *deg.* 23 *min.* 41 *s.* p. p. *pour celle de cette hypoténuse.*

Mais, si au lieu de faire la construction pré-
* Fig. 116. *cédente, on aime mieux prolonger le côté* AC * *vers le point* D, *jusqu'à ce que l'arc* CD *soit le quart de la circonférence d'un cercle ; prendre ensuite sur l'hypoténuse* BC *un arc* CE *qui soit aussi le quart de la circonférence d'un cercle ; & supposer enfin, qu'un arc* DE *d'un grand cercle passe par les points* D *&* E *: on aura un trian-*
(b) N. 166† *gle* FBE, *dont les parties usuelles, (qui* (b) *seront l'angle droit* E, *l'angle* BFE *qui est égal à l'angle* DFA *dont le complément* DA *du côté donné* AC *est la mesure, le complément* FB *du côté donné* AB, *& le complément* EB *de l'hypoténuse demandée* BC,) *se trouveront encore rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263 ; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :*

Logarithme

Logarithme du sinus de l'angle BFE qui est le complément du côté AC donné de 47 deg. 23 m. - - - - - - - - - - - - -	9.8306464
Logarithme du sinus du complément FB du côté AB donné de 129 deg. 18 m. - - - -	9.8016649
Logarithme du sinus du complément EB de l'hypoténuse demandée BC - - - - - - - -	19.6323113

qui est le même que celui qu'on a trouvé par la construction précédente, & qui donne par conséquent le même nombre 25 deg. 23 min. 41 sec. p. p. pour la valeur de ce complément.

269. 2^ent *Si les côtés d'un triangle-Sphérique rectangle valent chacun plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; si par exemple, dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AB *est de* 134 *deg.* 42 *min.* *& le côté* AC *de* 112 *deg.* 30 *min. l'hypoténuse* BC *vaudra moins que le quart de la circonférence d'un cercle* (a). *Ainsi, si après avoir prolongé cette hypoténuse vers le point* E, *jusqu'à ce que l'arc* BE *soit le quart de la circonférence d'un cercle, & avoir pris sur le côté* AB *un arc* BD *qui soit aussi le quart de la circonférence d'un cercle, on suppose qu'un arc* DE *d'un grand cercle passe par les points* D *&* E, *on aura un triangle* FCE, *dont les parties usuelles, (qui seront* (b) *l'angle droit* E ; *l'angle* CFE *qui est égal à l'angle* DFA *dont le complément* AD *du côté donné* AB *est la mesure ; le complément* FC *du côté donné* AC, *& le complément* EC *de l'hypoténuse demandée* BC,) *seront rangées dans le même ordre que celles du triangle du* N° 263 ; *& donneront par conséquent une proportion*

* Fig. 117.

(a) N. 255.

(b) N. 288.

pareille à celle de ce No. Ainsi :

Logarithme du sinus de l'angle CFE qui est le complément du côté AB donné de 134 deg. 42 m.	9 8471991
Logarithme du sinus du complément FC du côté AC donné de 112 deg. 30 m. - - - - -	9.5828397
Logarithme du sinus du complément EC de l'hypoténuse demandée BC - - - - - - - - -	19.4300388

(a) N. 103. *qui (a) donne 15 d. 36 m. 55 s.* p. p. *pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 74 d. 23 m. 5 s.* p. m. *pour celle de cette hypoténuse.*

Mais, si au lieu de faire la construction précé-
* Fig. 118. *dente, on aime mieux prolonger les côtés* AB * *&* AC, *jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point* D ; *on aura un triangle* DBC, *dont les côtés* BD *&* CD *vaudront chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle ; & dont les parties usuelles, (qui seront l'angle droit*
(b) N. 197. D *(b), le côté* BD *qui est le supplément du côté*
(c) N. 186. AB *(c), le côté* CD *qui est le supplément du côté*
(d) N. 186. AC *(d), & l'hypoténuse demandée* BC, *) seront rangées dans le même ordre que celles du premier*
(e) N. 266. *triangle de ce second cas (e). Ainsi, l'on trouvera cette hypoténuse, de la même maniere dont on a trouvé celle de ce premier triangle.*

Nous avertissons que nous proposerons peu d'exemples de triangles qui ont des côtés plus grands que le quart de la circonférence d'un cercle, ou des angles obtus ; ce que nous venons de dire dans cette Scholie, étant suffisant pour faire voir la maniére dont il faut s'y prendre, toutes les fois qu'il se rencontre de ces sortes de triangles.

AUTRE EXEMPLE.

270. *On donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'angle B de 47 deg. 16 min. avec l'angle C de 68 deg. 33 m. & il faut trouver l'un ou l'autre des côtés AB & AC.* * Fig. 119.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, le côté que l'on cherche, & l'angle qui lui est adjacent. Mais, les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle donné C, l'autre angle donné B, & celui des côtés AB & AC dont on cherche la valeur, ne sont point opposées les unes aux autres. Ainsi, 1^ent^ pour trouver le côté AB, il faut par une construction pareille à celle du N°. 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (*a*) l'angle droit E, l'angle EBF qui est égal à l'angle donné ABC, le complément EF de l'autre angle donné C, & le complément BF du côté demandé AB,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 264; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi: (a) N. 266.

Complément du logarithme du sinus de l'angle EBF *donné de* 47 *d.* 16 *m.* - - - - - - - -	0.1339964
Logarithme du sinus du complément EF *de l'angle* C *donné de* 68 *d.* 33 *m.* - - - - - - - - -	9.5631121
Logarithme du sinus du complément BF *du côté demandé* AB - - - - - - - - - -	9.6971085

qui (*b*) donne 29 deg. 51 min. 31 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 60 deg. 8 min. 29 sec. pour (b) N. 103.

celle de ce côté ; lequel vaut moins que le quart de la circonfé-
(a) N. 228. rence d'un cercle (a), puisque l'angle C qui lui est opposé est aigu : mais, qui donneroit 119 deg. 51 min. 31 sec. pour la
(b) N. 229. valeur de ce même côté (b), si ce même angle étoit obtus.

2ent Pour trouver le côté AC, il faut aussi par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle HCI dont les parties
(c) N. 266. usuelles, (qui sont (c) l'angle droit H, l'angle HCI qui est égal à l'angle donné ACB, le complément HI de l'autre angle donné B, & le complément CI du côté demandé AC,) se trouvent aussi rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 264 ; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus de l'angle HCI *donné de* 68 *d.* 33 *m.* - - - - - - - -	0.0311730
Logarithme du sinus du complément HI *de l'angle* B *donné de* 47 *d.* 16 *m.* - - - - - -	9.8660036
Logarithme du sinus du complément CI *du côté demandé* AC - - - - - - - - - - - - -	9.8971766

(d) N. 103. qui (d) donne 52 deg. 6 min. 32 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 37 deg. 53 min. 28 sec. pour celle de ce côté ; lequel vaut moins que le quart de la circon-
(e) N. 228. férence d'un cercle (e), puisque l'angle B qui lui est opposé est aigu : mais, qui donneroit 142 deg. 6 min. 32 sec. p. p.
(f) N. 229. pour la valeur de ce même côté (f), si ce même angle étoit obtus.

SCHOLIE.

271. *Lorsque dans un triangle-Sphérique rectangle dont les parties usuelles ne sont point opposées les unes aux autres, deux seulement des parties variables se trouvent de suite, on*

est sûr qu'en prolongeant † les côtés, on formera avec la circonférence du grand cercle qui aura pour Pôle l'un des angles obliques de ce triangle, un autre triangle dont les parties usuelles seront opposées les unes aux autres; & donneront par conséquent quelqu'une des proportions démontrées au N° 250. Mais on peut se méprendre au côté vers lequel il faut faire ce prolongement. Car, si pour trouver le côté AB * du triangle-Sphérique ABC, on avoit prolongé ses côtés vers les points G, H & I, les parties usuelles du triangle HCI que l'on auroit formé par ces prolongemens, (lesquelles auroient été (a) l'angle droit H, l'angle HCI qui est égal à l'angle donné ACB, le complément HI de l'autre angle donné B, & l'angle I qui est le complément du côté demandé AB,) ne se seroient point trouvées opposées les unes aux autres. Or, lorsque cela arrive, il faut prolonger ces mêmes côtés vers d'autres points D, E & F, comme nous l'avons fait.

* Fig. 119.

(a) N. 266.

Autre Exemple.

272. *On donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AC de 43 deg. 17 min. avec l'hypoténuse BC de 72 deg. 35 min. & il faut trouver l'autre côté AB.*

* Fig. 120.

Solution. Dans le triangle proposé, deux

† Nous supposons ici, conformément à ce que nous avons dit à la fin du N° 269, que les côtés dont il s'agit valent moins que le quart de la circonférence d'un cercle. Mais s'ils étoient plus grands, au lieu de les prolonger, il faudroit prendre sur eux des parties égales au quart de la circonférence d'un cercle; comme nous l'avons fait aux N.os 268 & 269.

ſeulement des parties variables ſont de ſuite; ſçavoir, le côté AC, & le côté demandé AB. Mais, comme les parties uſuelles, qui ſont l'angle droit A, l'hypoténuſe BC, le côté AC, & le côté demandé AB, ne ſont point oppoſées les unes aux autres, il faut par une conſtruction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle ECF, dont les parties uſuelles,
* N. 266. (qui ſont (*a*) le complément CF du côté donné AC, le complément CE de l'hypoténuſe donnée BC, l'angle droit E, & l'angle F qui eſt le complément du côté demandé AB,) ſe trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 262; & donnent par conſéquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainſi;

Complément du logarithme du ſinus du complément CF *du côté* AC *donné de* 43 *d.* 17 *m.* - - -	0.1378852
Logarithme du ſinus du complément CE *de l'hypoténuſe* BC *donnée de* 72 *d.* 35 *m.* - - - - -	9.4761334
Logarithme du ſinus de l'angle F *qui eſt le complément du côté demandé* AB - - - - - - - -	9.6140186

(*b*) N. 103. qui (*b*) donne 24 deg. 16 min. 41 ſec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conſéquent, 65 deg. 43 m. 19 ſec. *p. m.* pour celle de ce côté; lequel vaut moins que le quart de la cir-
(*c*) N. 238. conférence d'un cercle (*c*), puiſque l'hypoténuſe BC, & le côté AC, valent auſſi chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 114 deg. 16 min. 41. ſec. *p. p.*
(*d*) N. 239. pour la valeur de ce même côté (*d*), ſi cette même hypoténuſe valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, &c.

Autre Exemple.

273. *On donne dans le triangle-Sphérique*
* Fig. 121. ABC * *qui eſt rectangle en* A, *l'angle* C *de* 39

deg. 45 min. avec le côté AB *de* 28 *deg.* 35 *min. & il faut trouver l'autre angle* B.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, le côté AB, & l'angle demandé B. Mais, comme les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle C, le côté AB, & l'angle demandé B, ne sont point opposées les unes aux autres, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (*a*) le complément BF du côté donné AB, le complément EF de l'angle donné C, l'angle droit E, & l'angle EBF qui est égal à l'angle demandé ABC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 262; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi; (a) N. 266.

Complément du logarithme du sinus du complément BF *du côté* AB *donné de* 28 *d.* 35 *m.* - - - -	0.0564451
Logarithme du sinus du complément EF *de l'angle* C *donné de* 39 *d.* 45 *m.* - - - - - - - - -	9.8858370
Logarithme du sinus de l'angle demandé EBF *ou* ABC -	9.9422821

qui (*b*) donne 61 deg. 6 min. 37 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle (*c*), si le côté AC qui lui est opposé, ou l'hypoténuse BC, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donnera 118 deg. 53 min. 23 sec. *p. m.* pour la valeur de ce même angle (*d*), si ce même côté AC, ou, cette même hypoténuse BC, vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Ainsi, il faut connoître l'espece du côté AC, ou celle de l'hypoténuse BC, pour pouvoir déterminer celle de l'angle demandé ABC. *Voyez le N°* 265.

(b) N. 103.
(c) N. 241.
(d) N. 241.

AUTRE EXEMPLE.

274. *Enfin, on donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *l'angle* C *de* 46 *deg.* 58 *min. avec le côté* AC *de* 34 *deg.* 29 *min. & il faut trouver l'autre angle* B.

* Fig. 121.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont encore de suite; sçavoir, le côté AC, & l'angle C. Mais, comme les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle C, le côté AC, & l'angle demandé B, ne sont point opposées les unes aux autres, il faut encore par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle ECF, dont les parties usuelles, (qui sont (*a*) l'angle droit E, l'angle ECF qui est égal à l'angle donné ACB; le complément CF du côté donné AC, & le complément EF de l'angle demandé B,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

(*a*) N. 266.

Logarithme du sinus de l'angle ECF *donné de* 46 *d.* 58 *m.* - - - - - - - - - - - - - - - 9.8638917
Logarithme du sinus du complément CF *du côté* AC *donné de* 34 *d.* 29 *m.* - - - - - - - 9.9160805

Logarithme du sinus du complément EF *de l'angle demandé* B - - - - - - - - - - - - - 19.7799722

qui (*b*) donne 37 deg. 3 min. 2 s. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 52 deg. 56 min. 58 sec. *p. m.* pour celle de cet angle; lequel est aigu (*c*), puisque le côté AC qui lui est opposé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donneroit 127 deg. 3. m. 2 s. *p. p.* pour la valeur de ce même angle (*d*), si ce même côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

(*b*) N. 263.
(*c*) N. 224.
(*d*) N. 225.

PROBLESME II.

PROBLESME II.

175. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique rectangle, dont toutes les parties variables sont de suite.*

PREMIER CAS.

Lorsque les côtés adjacents à l'angle droit sont parties usuelles.

176. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC* *qui est rectangle en* A, *le côté* AB *de* 28 *deg.* 35 *min. avec le côté* AC *de* 41 *deg.* 12 *min.* & *il faut trouver l'un ou l'autre des angles* B & C. * Fig. 123.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AB, le côté AC, & celui des angles B & C dont on cherche la valeur, sont de suite. De plus, les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, sont parties usuelles. Ainsi (a) 1ent, *le sinus du côté* AB *est au sinus total, comme la tangente du côté* AC *est à la tangente de l'angle* B. Par conséquent, on trouvera cet angle (b), de la maniére suivante. (a) N. 155. (b) N. 110.

Complément du logarithme du sinus du côté AB *donné de* 28 *d.* 35 *m.* - - - - - - - -	0.3201757
Logarithme de la tangente du côté AC *donné de* 41 *d.* 12 *m.* - - - - - - -	9.9422233
Logarithme de la tangente de l'angle demandé B	10.2623990

qui (c) donnera 61 deg. 20 min. 34 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle; lequel est aigu (d), puisque le côté AC qui lui est opposé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 118 deg. 39 min 26 s. *p. m.* pour la valeur de ce même angle (e), si ce même côté valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle. (c) N. 103. (d) N. 124. (e) N. 125.

2ent, *le ſinus du côté* AC *eſt au ſinus total, comme la tangente du côté* AB *eſt à la tangente de l'angle* C. Par conſéquent, on trouvera cet
(a) N. 110. angle (a), de la maniére ſuivante.

Complément du logarithme du ſinus du côté AC *donné de* 41 *d.* 11 *m.* - - - - - - - -	0.1813195
Logarithme de la tangente du côté AB *donné de* 28 *d.* 35 *m.* - - - - - - - - - - - - -	9.7362695
Logarithme de la tangente de l'angle demandé C -	9.9175886

(b) N. 103. qui (b) donnera 39 deg. 35 min. 46 ſec. *p. p.* pour la valeur de cet
(c) N. 224. angle; lequel eſt aigu (c), puiſque le côté AB qui lui eſt oppoſé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 140 deg. 24 m. 14 ſ. *p. m.* pour la valeur de ce
(d) N. 225. même angle (d), ſi ce même côté valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Autre Exemple.

277. *On donne dans le triangle-Sphérique*
* Fig. 124. ABC * *qui eſt rectangle en* A, *le côté* AB *de* 37 *deg.* 14 *min. avec l'angle* C *qui eſt oppoſé à ce côté, de* 53 *deg.* 8 *min. & il faut trouver l'autre côté* AC.

Solution. Dans le triangle propoſé, toutes les parties variables, qui ſont le côté AB, l'angle C, & le côté AC dont on cherche la valeur, ſont de ſuite. De plus, les côtés AB & AC qui ſont adjacents à l'angle droit A, ſont
(e) N. 255. parties uſuelles. Ainſi (e), *la tangente de l'angle* C *eſt à la tangente du côté* AB, *comme le ſinus total eſt au ſinus du côté* AC. Par conſéquent,
(f) N. 111. on trouvera ce côté (f), de la maniére ſuivante.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle C *donné de* 53 *d.* 8 *m.* †. - - - - 9.8750102
Logar. de la tang. du côté AB *donné de* 37 *d.* 14 *m.* 9.8807906

Logarithme du sinus du côté demandé AC - - 19.7558002

qui (a) donnera 34 deg. 44 min. 36 sec. *p. p.* pour la valeur de ce côté ; lequel vaudra moins que le quart de la circonférence d'un cercle (b), lorsque l'angle B qui lui est opposé sera aigu, ou lorsque l'hypoténuse BC vaudra aussi moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donnera 145 deg. 15 min. 24 sec. *p. m.* pour la valeur de ce même côté (c) ; lorsque ce même angle B sera obtus, ou lorsque cette même hypoténuse BC vaudra plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Ainsi, il faut connoître l'espece de l'angle B, ou celle de l'hypoténuse BC, pour pouvoir déterminer celle du côté demandé AC. *Voyez le N°* 265.

(a) N. 103.
(b) N. 228. & 240.
(c) N. 229. & 240.

AUTRE EXEMPLE.

278. *Enfin, on donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AC *de* 32 *deg.* 40 *min. avec l'angle* C *qui est adjacent à ce côté, de* 48 *deg.* 51 *min. & il faut trouver l'autre côté* AB.

* Fig. 125.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AC, l'angle C, & le côté AB dont on cherche la valeur, sont encore de suite. De plus, les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, sont parties usuelles. Ainsi (d), *le sinus total est au sinus du côté* AC, *comme la tangente de l'angle* C *est à celle du côté* AB. Par conséquent, on trouvera ce côté (e), de la maniére suivante.

(d) N. 255.
(e) N. 105.

Logarithme du sinus du côté AC *donné de* 32 *d.* 40 *m.* - - - - - - - - - - - - - 9.7321932
Logarithme de la tangente de l'angle C *donné de* 48 *d.* 51 *m.* - - - - - - - - - - - - 10.0585415

Logarithme de la tangente du côté demandé AB - 19.7907347

qui (f) donnera 31 deg. 42 m. 4 s. *p. m.* pour la valeur de ce côté ;

(f) N. 103.

† *Voyez le N°* 108.

(a) N. 228. lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a), puisque l'angle C qui lui est opposé est aigu : mais, qui donneroit 148 deg. 17 m. 56 s, p. p. pour la valeur de ce même (b) N. 229. côté (b), si ce même angle étoit obtus.

SECOND CAS.

Lorsque les côtés adjacents à l'angle droit ne sont point parties usuelles.

279. *On donne dans le triangle-Sphérique* * Fig. 126. ABC * *qui est rectangle en* A, *l'angle* B *de* 40 *deg.* 27 *min. avec l'angle* C *de* 51 *deg.* 18 *min.* & *il faut trouver l'hypoténuse* BC.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont l'angle B, l'angle C, & l'hypoténuse BC dont on cherche la valeur, sont de suite. Cependant, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, on ne peut constituer immédiatement avec les sinus & les tangentes des parties usuelles de ce triangle, aucune des proportions démontrées au N° 255. Mais, si par une construction pareille † à celle du N° 266, on forme un autre triangle ECF, les parties usuelles de cet autre (c) N. 266. † triangle, (qui seront (c) l'angle ECF qui est égal à l'angle donné ACB, le complément EF de l'angle donné B, l'angle droit E, & le complément CE de l'hypoténuse demandée BC,) se trouveront rangées dans le même ordre que

† Si quelque côté du triangle proposé valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, on se serviroit de ce que nous avons dit aux N° 268 & 269.

celles du triangle du N° 277; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Complément du logarithme de la tangente de l'angle ECF *donné de 51 deg. 18 m.* † - - - -	9.9037144
Logarithme de la tangente du complément EF *de l'angle* B *donné de 40 d. 27 m.* - - - -	9.8813689
Logarithme du sinus du complément CE *de l'hypoténuse demandée* BC - - - - - - - - - - -	19.7850833

qui (a) donne 37 deg. 33 min. 52 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 52 deg. 26 m. 8 s. *p. m.* pour celle de cette hypoténuse; laquelle vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (b), puisque les angles B & C qui lui sont adjacents, sont de même espece : mais, qui donneroit 127 deg. 33 m. 52 s. *p. p.* pour la valeur de cette même hypoténuse (c), si ces angles étoient de différente espece.

(a) N. 103.
(b) N. 240.
(c) N. 240.

AUTRE EXEMPLE.

280. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AC *de* 39 *deg.* 28 *min. avec l'hypoténuse* BC *de* 59 *deg.* 17. *min. & il faut trouver l'angle* C.

* Fig. 127.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AC, l'hypoténuse BC, & l'angle C dont on cherche la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (d) l'angle F dont le complément AD du côté donné AC est la mesure, le complément BE de l'hypoténuse donnée BC,

(d) N. 266.

† Voyez le N° 108.

l'angle droit E, & le complément EF de l'angle demandé C,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 277, & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi ;

Complément du logarithme de la tangente de l'angle F *qui est le complément du côté* AC *donné de* 39 *d.* 28 *m.* - - - - - - - - - - - -	9.9155896
Logarithme de la tangente du complément BE *de l'hypoténuse* BC *donnée de* 59 *d.* 17 *m.* - -	9.7738961
Logarithme du sinus du complément EF *de l'angle demandé* C - - - - - - - - - - - -	19.6894857

(a) N. 103. qui (a) donne 29 deg, 17 min. 16 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 60 deg. 42 min. 44 sec. *p. m.*
(b) N. 241. pour celle de cet angle ; lequel est aigu (b), puisque l'hypoténuse BC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que l'angle B qui est opposé au côté AC plus petit aussi que
(c) N. 224. le quart de la circonférence d'un cercle, est aigu (c) : mais, qui donneroit 119 deg. 17 min 16 sec. *p. p.* pour la valeur
(d) N. 241. de ce même angle (d), si cette même hypoténuse BC, ou ce même côté AC, valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

SCHOLIE I.

(e) N. 269. 281. *Quoique nous ayons dit (e) que nous proposerions peu d'exemples de triangles qui auroient quelques côtés plus grands que le quart de la circonférence d'un cercle, ou quelques angles obtus, nous allons cependant donner encore celui-ci, afin de ne rien oublier qui puisse causer la plus légere difficulté.*

* Fig. 128. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AB *de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *s. avec l'hypoténuse* BC *de* 100 *deg.* 24 *min.* 20 *sec. & il faut trouver l'angle* B.

Dans le triangle proposé, les parties variables, qui sont le côté AB, *l'angle demandé* B, *&* *l'hypoténuse* BC, *sont de suite. Mais, les côtés* AB *&* AC, *qui sont adjacents à l'angle droit* A, *ne sont point parties usuelles; ainsi, il faut former un autre triangle dans lequel ces côtés le deviennent. Or, pour cet effet, on prolonge le côté* AB, *jusqu'à ce que l'arc*BAD *soit le quart de la circonférence d'un cercle. On retranche du côté* BC *un arc* BE *égal aussi au quart de la circonférence d'un cercle. Enfin, on suppose qu'un arc* DE *d'un grand cercle passe par les points* D *&* E. *Et par ce moyen, on a un autre triangle* FEC *dont les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit* E; *l'angle* CFE *qui est égal à l'angle* AFD, *dont le complément* AD *du côté donné* AB *est la mesure; le complément* EC *de l'hypoténuse donnée* BC; *& le complément* FE *de l'angle demandé* B, *) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 277; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :* (a) N. 266.

Complément du logarithme de la tangente du complément AD du côté AB donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - - - - - - - 0.0583290

Logarithme de la tangente du complément EC de l'hypoténuse BC donnée de 100 d. 24 m. 20 s. 9.2639543

Logarithme du sinus du complément FBE de l'angle demandé B - - - - - - - - - - - 9.3222833

qui (b) donne 12 deg. 7 min. 27 sec. p. p. *pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 102 deg. 7 min. 27 sec. pour celle de cet angle; lequel est obtus (c), puisque l'hypoténuse* BC *du triangle* ABC *valant plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & le côté* AB *valant moins que ce quart, le côté* AC *doit valoir plus que le quart de la circonférence d'un cercle (d).* (b) N. 103. (c) N. 237. (d) N. 225.

SCHOLIE II.

282. *Lorsque dans un triangle-Sphérique rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit ne sont point parties usuelles, toutes les parties variables sont de suite, on est sûr qu'en prolongeant † les côtés, on formera avec la circonférence du grand cercle qui aura pour Pôle l'un des angles obliques de ce triangle, un autre triangle dont les côtés adjacents à l'angle droit seront parties usuelles; & donneront par conséquent avec les autres parties usuelles, quelqu'une des proportions démontrées au N° 255. Mais, on peut se méprendre au côté vers lequel il faut faire ce prolongement, comme nous l'avons déja dit au N° 271. Car, si par exemple, pour trou-*
* Fig. 127. *ver l'angle* C * *du triangle* ABC, *on avoit prolongé les côtés vers les points* G, H & I, *les côtés* HC & HI, *qui sont adjacents à l'angle droit* H *du triangle* HCI *que l'on auroit formé par ces prolongemens, n'auroient point été parties usuelles. Or, lorsque cela arrive, il faut prolonger ces mêmes côtés vers d'autres points* D, E & F, *comme nous l'avons fait.*

AUTRE EXEMPLE.

283. *On donne dans le triangle-Sphérique*
* Fig. 129. ABC * *qui est rectangle en* A, *l'angle* C *de* 44 *deg.* 10 *min. avec l'hypoténuse* BC *de* 58 *deg.* 35 *min.* & *il faut trouver l'autre angle* B.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont l'angle C, l'hy-

† *Voyez la Note du N° 271.*

potenuse

potenuse BC, & l'angle B dont on cherche la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du No 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles (qui sont (a) le complément EB de l'hypoténuse donnée BC, l'angle droit E, le complément EF de l'angle donné C, & l'angle EBF qui est égal à l'angle demandé ABC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du No 276; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce No. Ainsi; (a) N. 266.

Complément du logarithme du sinus du complément BE *de l'hypoténuse* BC *donnée de 58 deg. 35 m.*	0.2829474
Logarithme de la tangente du complément EF *de l'angle* C *donné de 44 deg. 10 m.* - - - -	10.0126349
Logarithme de la tangente de l'angle demandé ABC	10.2955823

qui (b) donne 63 deg. 8 min. 47 sec. *p. m.* pour la valeur de cet angle; lequel est aigu (c), puisque l'hypoténuse BC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que l'angle C est aigu: mais, qui donneroit 116 deg. 51 min. 13 sec. *p. p.* pour la valeur de ce même angle (d), si cette même hypoténuse BC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle. (b) N. 102. (c) N. 241. (d) N. 241.

AUTRE EXEMPLE.

284. *On donne dans le triangle-Sphérique* ABC* *qui est rectangle en* A, *l'angle* C *de* 41 *deg.* 11 *min. avec l'hypoténuse* BC *de* 50 *deg.* 49 *m. & il faut trouver le côté* AC. * Fig. 130.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont l'angle C, l'hypo-

ténuse BC, & le côté AC dont on cherche la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle BEF, dont les parties
(a) N. 266. usuelles, (qui sont (a) le complément EF de l'angle donné C, l'angle droit E, le complément BE de l'hypoténuse donnée BC, & l'angle F dont le complément AD du côté demandé AC est la mesure,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 276; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus du complément EF *de l'angle* C *donné de* 41 *deg.* 11 *m.* - -	0,1234320
Logarithme de la tangente du complément BE *de l'hypoténuse* BC *donné de* 50 *deg.* 49 *m.* - -	9.9112087
Logarithme de la tangente de l'angle F *complément du côté demandé* AC - - - - - -	10.0346407

(b) N. 103. qui (b) donne 47 deg. 16 min. 57 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 42 deg. 43 min. 3 sec. *p. m.* pour celle de ce côté; lequel vaut moins que le quart de la
(c) N. 237. circonférence d'un cercle (c), puisque l'hypoténuse BC, & le côté AB qui est opposé à un angle aigu C, valent aussi chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donneroit 137 deg. 16 min. 57 sec. *p. p.* pour la valeur de ce
(d) N. 237. même côté (d), si l'angle C étoit obtus, ou si l'hypoténuse BC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

AUTRE EXEMPLE.

285. *Enfin, on donne dans le triangle-Sphé-*
* Fig. 131. *rique* ABC * *qui est rectangle en* A, *le côté* AC *de* 52 *deg.* 25 *min. avec l'angle* C *de* 39 *deg.* 28 *min. & il faut trouver l'hypoténuse* BC.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AC, l'angle C, & l'hypoténuse BC dont on cherche la valeur, sont encore de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit E, le complément EF de l'angle donné C, l'angle F dont le complément AD du côté donné AC est la mesure, & le complément EB de l'hypoténuse demandée BC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 278; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi: (a) N. 266.

Logarithme du sinus du complément EF *de l'angle* C *donné de* 39 *deg.* 28 *m.* - - - - - - - - - 9.8876142.
Logar. de la tang. de l'angle F *qui est le complément du côté* AC *donné de* 52 *deg.* 25 *m.* - - - 9.8862878.

Logarithme de la tangente du complément EB *de l'hypoténuse demandée* BC - - - - - - - 19.7739020

qui (b) donne 30 deg. 43 min. 1 s. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 59 deg. 16 min. 59 s. *p. m.* pour celle de cette hypoténuse; laquelle (c) vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, puisque le côté AC, & le côté AB qui est opposé à un angle aigu C, valent chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui (d) donneroit 120 deg. 43 min. 1 s. *p. p.* pour la valeur de cette même hypoténuse, si ce même angle C étoit obtus, ou si ce même côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle. (b) N. 103. (c) N. 233. (d) N. 233.

SCHOLIE.

286. *On peut remarquer par les différents*

exemples que nous venons de proposer sur la résolution des triangles-Sphériques rectangles. 1ent *Que les parties usuelles de ces sortes de triangles ne sont susceptibles que de* 16 *combinaisons différentes*, *dont* 8 *dépendent du* N° 250, *&* 8 *du* N° 255. 2ent *Que des* 8 *combinaisons qui dépendent du* N° 250, *trois seulement peuvent se résoudre immédiatement ; & qu'il en est de même des* 8 *qui dépendent du* N° 255.

ARTICLE II.

De la résolution des triangles-Sphériques obliquangles.

287. Pour traiter avec ordre de la résolution des triangles-Sphériques obliquangles, nous les distinguerons en trois especes, dont la premiére comprendra *ceux dont les parties usuelles sont opposées les unes aux autres* : la seconde, *ceux dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres* : & la troisiéme, *ceux qui n'ont ni leurs parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes leurs parties connues séparées les unes des autres.* Et par ce moyen, nous réduirons tous les problêmes qui concernent ces sortes de triangles, aux trois suivans ; qui dépendent, l'un de la premiére
(a) N. 250. proposition du chapitre précedent (*a*) ; l'autre,
(b) N. 258. de la derniére proposition du même chapitre (*b*) ;
(c) N. 260. & le dernier, de l'article précedent (*c*), & des N°s 253, 254, 256 & 257.

PROBLESME I.

288. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, dont les parties uſuelles ſont oppoſées les unes aux autres.*

Lorſque dans un triangle-Sphérique obliquangle, les parties uſuelles ſont oppoſées les unes aux autres, les parties connues ne peuvent être que *deux côtés, avec un angle oppoſé à l'un de ces côtés;* & l'on cherche *l'angle oppoſé à l'autre côté:* ou *deux angles, avec un côté oppoſé à l'un de ces angles;* & l'on cherche *le côté oppoſé à l'autre angle.* Ainſi, ce problême a deux cas.

PREMIER CAS.

289. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC *, *le côté* AB *de* 78 *deg.* 23 *min., l'angle* C *oppoſé à ce côté, de* 63 *deg.* 49 *min. avec le côté* AC *de* 53 *deg.* 7 *min. & il faut trouver l'angle* B *oppoſé à ce dernier côté.* *Fig. 132.

Solution. *Le ſinus du côté* AB *eſt au ſinus du côté* AC, *comme le ſinus de l'angle* C *eſt au ſinus de l'angle* B (*a*). (*a*) N. 250.

Ainſi, l'on trouvera ce dernier angle (*b*), de la maniére ſuivante. (*b*) N. 107.

Complément du logarithme du ſinus du côté AB *donné de* 78 *deg.* 23 *m.* - - - - - - -	0.0089881
Logarithme du ſinus du côté AC *donné de* 53 *deg.* 7 *m.* - - - - - - - - - - - - - - - -	9.9030136
Logarithme du ſinus de l'angle C *donné de* 63 *deg.* 49 *m.* - - - - - - - - - - - - - - -	9.9529797
Logarithme du ſinus de l'angle demandé B - -	19.8649814

qui (*c*) donnera 47 deg. 7 min. 16 ſ. *p. m.* pour la valeur de cet angle. (*c*) N. 103.

SCHOLIE.

290. *Quoique les ambiguités qui se rencontrent dans les triangles-Sphériques dont on propose la résolution en géneral, soient indifférentes, puisque, (comme nous l'avons déja dit (a),) elles disparoissent lorsque ces triangles sont appliqués à des questions astronomiques; cependant, si l'on veut lever celles qui se trouvent dans la résolution générale des triangles-Sphériques obliquangles, on peut le faire, en supposant qu'un arc d'un grand cercle qui passe par l'un de leurs angles, forme avec leurs côtés deux triangles rectangles; & en déterminant ensuite par les principes que nous avons établis dans le troisiéme chapitre de la premiére section de ce Livre (b), l'espece des angles de ces derniers triangles, ou celle de leurs côtés, de la même maniére dont nous l'avons fait à l'égard de chaque triangle-Sphérique rectangle que nous avons résolu dans l'article précedent.*

(a) N. 265.

(b) N. 222. & suivans.

Ainsi, si l'on veut, par exemple, connoître dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, *l'espece de l'angle* B, *on supposera qu'un arc* DC *d'un grand cercle passe par l'angle* C, & *forme avec les côtés* AB, AC & CB, *deux triangles* ACD & BCD, *qui sont rectangles l'un & l'autre en* D. *Et par ce moyen, l'on verra que puisque dans le premier de ces deux triangles, l'hypoténuse* AC & *le côté* AD *valent chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle,*

* Fig. 131.

le côté DC *vaut aussi moins que le quart de la circonférence d'un cercle* (*a*) ; *& par conséquent*, (a) N. 237.
que l'angle B *du triangle* BCD, *qui est opposé à ce côté* DC, *doit être aigu* (*b*). *Or, on pourra* (b) N. 222.
déterminer de la même manière l'espece des angles & des côtés d'un triangle-Sphérique obliquangle quelconque, toutes les fois que cette espece sera susceptible de détermination.

SECOND CAS.

291. *On donne dans le triangle-Sphérique* * Fig. 133.
obliquangle ABC *, *l'angle* C *de* 42 *deg.* 37 *m. le côté* AB *qui est opposé à cet angle, de* 56 *deg.* 41 *min. avec l'angle* B *de* 33 *deg.* 50 *min. & il faut trouver le côté* AC *qui est opposé à ce dernier angle.*

Solution. *Le sinus de l'angle* C *est au sinus de l'angle* B, *comme le sinus du côté* AB *est au sinus du côté* AC (*c*). (c) N. 250.

Ainsi, l'on trouvera ce dernier côté (*d*), de (d) N. 107.
la maniére suivante.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 42 *deg.* 37 *m.* - - - - - - - - -	0.1693536
Logarithme du sinus de l'angle B *donné de* 33 *deg.* 50 *min.* - - - - - - - - - - - - -	9.7456828
Logarithme du sinus du côté AB *donné de* 56 *deg.* 41 *min.* - - - - - - -	9.9220232
Logarithme du sinus du côté demandé AC - -	19.8370596

qui (*e*) donnera 43 deg. 24 min. 21 sec. *p. p.* pour sa valeur (e) N. 103.
de ce côté.

PROBLESME II.

292. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres.*

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle-Sphérique obliquangle sont séparées les unes des autres, ces parties ne peuvent être que *les trois côtés*, & l'on cherche *les angles*; ou *les trois angles*, & l'on cherche *les côtés*. Ainsi, ce problême a deux cas.

PREMIER CAS.

293. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC*, *le côté* AB *de* 63 *deg.* 16 *m. le côté* AC *de* 31 *deg.* 50 *min. avec le côté* BC *de* 75 *deg.* 54 *min. & il faut trouver chaque angle* A, B *&* C.

* Fig. 134.

Solution. *Le rectangle fait des sinus des côtés* AB *&* AC *est au rectangle fait du sinus de la différence du côté* AB *à la moitié de la somme des trois côtés* AB, AC *&* BC, *& du sinus de la différence du côté* AC *à cette même moitié, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de la moitié de l'angle* A (*a*).

(a) N. 258.

Ainsi, l'on trouvera cet angle, de la maniére suivante.

	Valeur donnée du côté AB - - -	63 d.	16 s.
	Valeur donnée du côté AC - - -	31	50
	Valeur donnée du côté BC - - - -	75	54
Yent	*Somme de ces trois côtés* - -	171 .	0
	Moitié de cette somme - - - -	85	30
	Différence du côté AB *à cette moitié* -	22	14
	Différence du côté AC *à cette même moitié* -	53	40

Complément

2ent	*Complément du logarithme du sinus du côté* AB *donné de* 63 *d.* 16 *m.* - -	0.0490951 †
	Complément du logarithme du sinus du côté AC *donné de* 31 *d.* 50 *m.* -	0.2778186 †
	Logarithme du sinus de la différence du côté AB, *trouvée de* 22 *d.* 14 *m.* -	9.5779275
	Logarithme du sinus de la différence du côté AC, *trouvée de* 53 *d.* 40 *m.* -	9.9061107
	Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé A - -	19.8109519
	Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle -	9.9054759

qui (*a*) donnera 53 deg. 33 min. 10 sec. $\frac{290}{311}$ pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 107 deg. 6 min. 21 sec. *p. p.* pour celle de cet angle. (*a*) N. 103.

Lorsque l'on aura trouvé la valeur de l'angle A, on cherchera celle de l'angle B (*b*), de la maniére suivante. (*b*) N. 189.

Complément du logarithme du sinus du côté BC *donné de* 75 *deg.* 54 *m.* - - - - -	0.0132856
Logarithme du sinus du côté AC *donné de* 31 *deg.* 50 *m.* - - - - - - -	9.7221814
Logarithme du sinus du supplément (*c*) *de l'angle* A *trouvé de* 107 *deg.* 6 *m.* 21 *s.* - - - - - -	9.9803503
Logarithme du sinus de l'angle demandé B - -	19.7158173

(*c*) N. 6.

qui (*d*) donnera 31 d. 19 m. 2 s. *p. p.* pour la valeur de cet angle. (*d*) N. 103.

Enfin, on cherchera la valeur de l'angle C, de la même maniére dont on vient de s'y prendre pour trouver celle de l'angle B; ou de la maniére suivante (*e*). (*e*) N. 189.

Complément du logarithme du sinus du côté AC *donné de* 31 *deg.* 50 *m.* - - - - - - - - - -	0.2778186
Logarithme du sinus du côté AB *donné de* 63 *deg.* 16 *m.* - - - - - - - - - - - - - - - -	9.9509049
Logarithme du sinus de l'angle B *trouvé de* 31 *d.* 19 *m.* 2 *s.* - - - - - - - - - - - - -	9.7158173
Logarithme du sinus de l'angle demandé C - -	19.9445408

qui (*f*) donnera 61 d. 39 m. 23 s. *p. p.* pour la valeur de cet angle. (*f*) N. 103.

† *Voyez la première Note du N.* 145.

SCHOLIE.

294. *On peut aussi chercher la valeur de chacun des mêmes angles* B *&* C, *de la même maniére dont on s'y est pris pour trouver celle de l'angle* A.

SECOND CAS.

295. *On donne dans le triangle-Sphérique*
* Fig. 135. *obliquangle* ABC *, *l'angle* A *de* 109 *deg.* 18 *m. l'angle* B *de* 35 *deg.* 43 *min. avec l'angle* C *de* 68 *deg.* 25 *min. & il faut trouver chaque côté* AB, AC & BC.

Solution. Si l'on suppose que trois grands cercles ont pour Pôles, l'un l'angle A, l'autre l'angle C, & le dernier l'angle B, les circonférences de ces cercles formeront un triangle DEF dont les côtés DF, DE & EF seront
(a) N. 205. connus; puisque (a) ils seront les mesures, l'un de cet angle A, l'autre de cet angle C, & le dernier, du supplément de cet angle B. Ainsi,
(b) N. 293. l'on pourra connoître (b) la valeur de tel angle que l'on voudra de ce triangle DEF; & par
(c) N. 196. conséquent, celle de l'angle F. Mais (c), l'arc GI est la mesure de cet angle F; puisque cet
(d) N. 204. angle étant (d) l'un des Poles du cercle BIG, les arcs FI & FG sont chacun le quart de la cir-
(e) N. 188. conférence d'un cercle (e). Et le côté AB du triangle proposé est égal à cet arc GI; puisque l'angle B étant [c] l'un des Pôles du cercle HIF, l'arc BAI est le quart de la circonférence
(f) N. 188. d'un cercle (f); & que l'angle A étant pareillement [c] l'un des Pôles du cercle HGF,

l'arc AIG est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (*a*). Donc, le côté AB est aussi la mesure de ce même angle F; & par conséquent, lorsque l'on connoîtra la valeur de cet angle, on aura celle de ce côté. Or, on trouvera cette valeur (*b*), de la maniére suivante.

(*a*) N. 188.

(*b*) N. 293.

1ere	*Valeur du supplément* EF *de l'angle* B *donné de* 35 *deg.* 43 *m.* - - - - - -	144 *d.*	17 *m.*
	Valeur du côté DF *mesure de l'angle* A *donné de* 109 *deg.* 18 *m.* - - - - - -	109	18
	Valeur du côté DE *mesure de l'angle* C *donné de* 68 *deg.* 25 *m.* - - - - - - -	68	25
	Somme de ces trois côtés - - - - - -	322	0
	Moitié de cette somme - - - - - -	161	0
	Différence du côté EF *à cette moitié* - -	16	43
	Différence du côté DF *à cette même moitié*	51	42

2eme	*Complément du logarithme du sinus du côté* EF *trouvé de* 144 *deg.* 17 *m.* -	0.2337527 †
	Complément du logarithme du sinus du côté DF *trouvé de* 109 *deg.* 18 *m.*	0.0251196 †
	Logarithme du sinus de la différence du côté EF, *trouvée de* 16 *deg.* 43 *min.*	9.4588480
	Logarithme du sinus de la différence du côté DF, *trouvée de* 51 *deg.* 42 *m.* -	9.8947459
	Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé F - -	19.6124662
	Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle -	9.8062331

qui (*c*) donnera 39 deg. 47 min. 51 sec. $\frac{871}{1517}$ pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 79 deg. 35 m. 43 sec. pour celle de cet angle, laquelle, selon ce que l'on vient de démontrer, est la même que celle du côté demandé AB.

(*c*) N. 203.

LORSQUE l'on aura trouvé la valeur du côté AB, on cherchera celle du côté AC (*d*), de la maniére suivante.

(*d*) N. 291.

† Voyez la premiére Note du N° 145.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C *donné de* 68 *deg.* 25 *m.* - - - - - - - -	0.0315714
Logarithme du sinus de l'angle B *donné de* 35 *deg.* 43 *m.* - - - - - - - - - - - - - -	9.7662473
Logarithme du sinus du côté AB *trouvé de* 79 *deg.* 35 *min.* 43 *s.* - - - - - - - - - - -	9.9927993
Logarithme du sinus du côté demandé AC - -	19.7906180

(a) N. 103. qui (a) donnera 38 deg. 7 m. 54 sec. *p. p.* pour la valeur de ce côté.

Enfin, on cherchera la valeur du côté BC, de la même maniére dont on vient de s'y prendre pour trouver celle du côté AC; ou de la maniére suivante (b).

(b) N. 291.

Complément du logarithme du sinus de l'angle B *donné de* 35 *deg.* 43 *m.* - - - - - - - -	0.2337527
Logarithme du sinus du supplément de l'angle A *donné de* 109 *deg.* 18 *m.* - - - - - -	9.9748804
Logarithme du sinus du côté AC *trouvé de* 38 *deg.* 7 *min* 54 *s.* - - - - - - - - - - - - -	9.7906189
Logarithme du sinus du supplément du côté demandé BC - - - - - - - - - - - - - - -	19.9992521

(c) N. 103. qui (c) donnera 86 deg. 38 min. 10 sec. *p. p.* pour la valeur de ce supplément ; & par conséquent, 93 deg. 21 min. 50 sec. *p. m.* pour celle de ce côté.

SCHOLIE.

296. *On peut aussi chercher la valeur de chaque côté* AC * *&* BC, *de la même maniére dont on s'y est pris pour trouver celle du côté* AB ; *puisque* (d) *ces côtés* BC *&* AC *sont les mesures, l'un, de l'angle* E *du triangle* DEF , *& l'autre du supplément de l'angle* D *du même triangle.*

* Fig. 135.

(d) N. 205.

Et l'on peut remarquer que c'est la même chose de résoudre le triangle DEF, *ou le triangle* DEH

formé par les côtés DF *&* EF *du premier, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point* H.

PROBLESME III.

297. *Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, qui n'a ni ses parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes ses parties connues séparées les unes des autres.*

Lorsqu'un triangle-Sphérique obliquangle n'a ni ses parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes ses parties connues séparées les unes des autres, on ne peut le résoudre qu'en le changeant en deux triangles-Sphériques rectangles, par le moyen d'un arc d'un grand cercle, que l'on suppose tiré de l'un des angles perpendiculairement au côté qui est opposé à cet angle, prolongé s'il est nécessaire (*a*). Mais, pour sçavoir dequel angle on doit supposer que cet arc est tiré, il faut observer qu'*il doit toujours passer par la partie que l'on cherche, lorsqu'il n'y a que deux des parties connues qui soient de suite ;* & qu'*il ne doit au contraire jamais y passer, lorsque toutes les parties connues sont de suite.* Ainsi, l'on peut distinguer deux cas dans ce problême. (*a*) N. 230.

PREMIER CAS.

298. *Lorsque deux seulement des parties connues du triangle proposé sont de suite.*

299. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC*, *l'angle* A *de* 71 *deg.* 48 *min.* * Fig. 136.

l'angle C *de 56 deg. 23 min. avec le côté* AB *de 59 deg. 35 min. & il faut trouver l'angle* B.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit (*a*) passer par la partie dont on cherche la valeur, puisque deux seulement des parties connues sont de suite ; sçavoir, l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle demandé B, perpendiculairement au côté AC, cet arc formera avec les côtés AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera l'angle ABD (*b*), & le côté BD (*c*). On cherchera ensuite (*d*) l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'angle C qui est aussi donné, avec l'hypoténuse BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie ABD & CBD de l'angle demandé B ; & par conséquent, celle de cet angle demandé. Ainsi :

(*a*) N. 297.
(*b*) N. 283.
(*c*) N. 263.
(*d*) N. 273.

1ent (*e*)	*Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse* AB *donnée de 59 deg. 35 min.* - - - - - - - -	0.2956053
	Logarithme de la tangente du complément de l'angle A *donné de 71 deg. 48 min.*	9.5169097
	Logarithme de la tangente de l'angle ABD	9.8125150

(*e*) N. 283.

qui (*f*) donne 32 deg. 59 min. 59 sec. ½ *p. m.* pour la valeur de cet angle.

(*f*) N. 103.

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de 71 deg. 48 min.* - - - - - - - 9.9777108

2ème (a) *Logarithme du sinus de l'hypoténuse* AB *donnée de 59 deg. 35 min.* - - - 9.9356918 (a) N. 263.

Logarithme du sinus du côté BD - - 19.9134026

qui (b) donne 55 deg. 0 min. 26 sec. *p. m.* pour la valeur de ce côté. (b) N. 103.

Complément du logar. du sinus du compl. du côté BD *trouvé de 55 d. 0 m. 26 s.* - 0.2414869

3ème (c) *Logarithme du sinus du complément de l'angle* C *donné de 56 deg. 23 min.* - - 9.7432226 (c) N. 273.

Logarithme du sinus de l'angle CBD - - 9.9847095

qui (d) donne 74 deg. 53 min. 6 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle ; laquelle étant ajoûtée à celle de l'angle ABD que l'on a trouvée de 32 deg. 59 min. 59 sec. ½, donnera 107 deg. 53 min. 5 sec. ½ pour la valeur de l'angle demandé B. (d) N. 103.

SCHOLIE I.

300. *Suivant ce que nous avons démontré au N° 253* le sinus du complément l'angle A * est au sinus du complément de l'angle C, comme le sinus de l'angle au sommet ABD est au sinus de l'autre angle au sommet CBD. *Ainsi, après avoir trouvé* (e) *l'angle* ABD, *on pourra chercher immédiatement l'angle* CBD, *de la manière suivante, qui est la plus courte.* * Fig. 236. (e) N. 299.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 71 deg. 48 min. 0.5053795

Logarithme du sinus du complément de l'angle C donné de 56 deg. 23 min. - - - - - - - 9.7432226

Logarithme du sinus de l'angle ABD trouvé de 32 deg. 59 min. 59 sec. ½ - - - - - - 9.7361071

Logarithme du sinus de l'angle CBD. - - - 19.98470 2

qui differe de 3 unités † *de celui que l'on a trouvé au N° 299 : mais qui (f) donne le même nombre 74 deg. 53 min. 6 sec.* p. p. *pour la valeur de cette angle.* (f) N. 103.

† Cette différence vient des fractions des secondes, que l'on néglige, ou que l'on ne détermine qu'à peu près.

SCHOLIE II.

* Fig. 136, 137 & 138. 301. *Si dans le triangle proposé* ABC*, *les angles* A & C *ne sont point de même espece, l'arc perpendiculaire* BD *passe hors du triangle* (a). *Mais cela ne change rien à la maniére de trouver les parties inconnues des triangles rectangles* ABD & CBD. *Il faut seulement remarquer que l'angle demandé* ABC, *qui est la somme des angles* ABD & CBD, *lorsque l'arc perpendiculaire* BD *passe dans le triangle proposé, devient la différence du plus petit de ces deux angles au plus grand, lorsque ce même arc passe hors de ce triangle.*

(a) N. 230.

La seule chose qui peut faire quelque difficulté lorsque ce même arc perpendiculaire passe hors du triangle dont on cherche quelque partie, est de sçavoir quels sont les angles que l'on doit prendre pour les angles au sommet, & les arcs que l'on doit prendre pour les segments de la base. Mais cette difficulté cesse, si l'on fait attention que l'on ne doit jamais compter pour l'un de ces angles, l'angle vertical du triangle proposé; ni la base de ce même triangle, pour l'un de ces segments.

Ainsi, dans chacun des triangles ABC *des fig.* 137 & 138, *les angles* ABD & CBD *sont les angles au sommet, &* les arcs AD & CD *sont les segments de la base.*

AUTRE EXEMPLE.

302. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC*, *le côté* AB *de* 65 *deg.* 18 *m.* *le*

* Fig. 139.

le côté BC *de* 80 *deg.* 40 *min. avec l'angle* A *de* 58 *deg.* 9 *min. & il faut trouver l'autre côté* AC.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit aussi (*a*) passer par la partie dont on cherche la valeur, puisque deux seulement des parties connues sont aussi de suite; sçavoir l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle B, perpendiculairement au côté demandé AC, cet arc formera avec ce côté, & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera le côté AD (*b*), & le côté BD (*c*). On cherchera ensuite (*d*) le côté DC du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'hypoténuse BC qui est aussi donnée, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie AD & DC du côté demandé AC; & par conséquent, celle de ce côté demandé. Ainsi;

(*a*) N. 297.
(*b*) N. 284.
(*c*) N. 263.
(*d*) N. 271.

Premiérement, (*e*)

(*e*) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A *donné de* 58 *deg.* 9 *min.* - - -	0.2776353
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB *donnée de* 65 *deg.* 18 *min.* - -	9.6627093
Logarithme de la tangente du complément du côté AD - - - - -	9.9403445

qui (*f*) donne 41 deg. 4 min. 33 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 48 deg. 55 min. 27 sec. *p. m.* pour celle de ce côté.

(*f*) N. 103.

(a) N. 263. ## Secondement, (a)

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de 58 deg. 9 min.* - - - - - - 9.9291289
Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de 65 deg. 18 min.* - - - - 9.9583288

Logarithme du sinus du côté BD - - - 19.8874577

(b) N. 103. qui (b) donne 50 deg. 30 min. 29 sec. $\frac{3}{4}$ *p. m.* pour la valeur de ce côté.

(c) N. 272. ## Troisiémement, (c)

Complément du logarithme du sinus du complément du côté BD *trouvé de 59 deg. 30 min. 29 sec.* $\frac{3}{4}$ 0.1965655
Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse BC *donnée de 80 deg. 40 min.* - - - 9.2099917

(d) N. 103. *Logarithme du sinus du complément du côté* DC 9.4065572

qui (d) donne 14 deg. 44 min. 21 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 75 deg. 15 min. 39 sec. *p. m.* pour celle de ce côté; laquelle étant ajoûtée à la valeur du côté AD que l'on a trouvée de 48 deg. 55 min. 27 sec. donnera 124 deg. 11 min. 6 sec. *p. m.* pour celle du côté demandé AC.

SCHOLIE.

303. *Suivant ce que nous avons démontré au* * Fig. 139. *N°* 254, le sinus du complément du côté AB* est au sinus du complément du côté BC, comme le sinus du complément du segment AD est au sinus du complément du segment DC.
(e) N. 302. *Ainsi, après avoir trouvé* (e) *le segment* AD, *on pourra chercher immédiatement le segment* DC, *de la maniére suivante, qui est la plus courte.*

Complément du logarithme du finus du complément du côté AB donné de 65 deg. 18 min.	0.3789618
Logarithme du finus du complément du côté BC donné de 80 deg. 40 min. - - -	9.2099917
Logarithme du finus du complément du fegment AD trouvé de 48 deg. 55 min. 27 sec. - - -	9.8176032
Logarithme du finus du complément du fegment DC - - - - - - -	19.4065567

qui differe de cinq unités † *de celui que l'on a trouvé au N°* 302 : (*a*) *mais qui* (*a*) *donne le même nombre* 14 *deg.* 44 *min.* 21 *sec.* p. p. *pour la valeur de ce complément.* (a) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

304. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC *, *le côté* AB *de* 54 *deg.* 52 *min. le côté* BC *de* 72 *d.* 41 *m. avec l'angle* A *de* 47 *deg.* 39 *min. & il faut trouver l'autre angle* B. * Fig. 140.

Solution. Dans le triangle propofé, l'arc perpendiculaire doit encore (*b*) paffer par la partie dont on cherche la valeur, puifqu'il n'y a encore que deux des parties connues qui foient de fuite; fçavoir l'angle A, & le côté AB. Ainfi, fi l'on fuppofe un arc BD d'un grand cercle, tiré du fommet de l'angle demandé B, perpendiculairement au côté AC, cet arc formera avec les côtés AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD, qui feront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui eft donné, avec l'hypoténufe AB qui eft auffi donnée, Ainfi, l'on trouvera l'angle ABD (*c*), & le côté (b) N. 297. (c) N. 282.

† *Voyez la Note du N°* 300.

(a) N. 263. BD (a). On cherchera ensuite (b) l'angle CBD du
(b) N. 280. second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'hypoténuse BC qui est aussi donnée, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie ABD & CBD de l'angle demandé B ; & par conséquent, celle de cet angle demandé. Ainsi :

(c) N. 283.

Premiérement, (c)

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse AB *donnée de* 54 *deg.* 52 *min.*	0.2399689
Logarithme de la tangente du complément de l'angle A *donné de* 47 *deg.* 39 *min.* - -	9.9597693
Logarithme de la tangente de l'angle ABD -	10.1997382

(d) N. 103. qui (d) donne 57 deg. 44 min. 3 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle.

(e) N. 263.

Secondement, (e)

Logar. du sinus de l'angle A *donné de* 47 *d.* 39 *m.*	9.8686700
Logarithm. du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de* 54 *deg.* 52 *min.* - - - - -	9.9126551
Logarithme du sinus du côté BD - - -	19.7813251

(f) N. 103. qui (f) donne 37 deg. 11. min. 8 sec. $\frac{2}{3}$ *p. p.* pour la valeur de ce côté.

(g) N. 280.

Troisiémement, (g)

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté BD *trouvé de* 37 *deg.* 11 *min.* 8 *sec.* $\frac{2}{3}$ - - - - - -	9.8800410
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse BC *donnée de* 72 *deg.* 41 *min.* - -	9.4938545
Logar. du sinus du complément de l'angle CBD -	19.3738955

(h) N. 103. qui (h) donne 13 deg. 40 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$ *p.p.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 76 deg. 19 min. 4 sec. $\frac{1}{2}$ *p. m.* pour celle de cet angle ; laquelle étant ajoûtée à la valeur de l'angle ABD, trouvée de 57 deg. 44 min. 3 sec. *p. p.* donne 134 deg. 3 min. 7 sec. $\frac{1}{2}$, pour celle de l'angle demandé B.

SCHOLIE.

305. *Suivant ce que nous avons démontré au No 256*, la tangente du complément du côté AB * est à la tangente du complément du côté BC, comme le sinus du complément de l'angle au sommet ABD est au sinus du complément de l'autre angle au sommet CBD. *Ainsi, après avoir trouvé* (a) *l'angle* ABD, *on pourra chercher immédiatement l'angle* CBD, *de la manière suivante, qui est la plus courte.* * Fig. 140. (a) N. 304.

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté AB donné de 54 deg. 52 min. - - - - - -	0.1526240
Logarithme de la tangente du complément du côté BC donné de 72 deg. 41 min. - - -	9.4938545
Logarithme du sinus du complément de l'angle ABD trouvé de 57 deg. 44 min. 3 sec. - -	9.7274177
Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD	19.3738962

qui surpasse de sept unités † *celui que l'on a trouvé au No 304: mais qui* (b) *donne le même nombre* 13 *deg.* 40 *min.* 55 *sec.* ½ p. p. *pour la valeur de ce complément.* (b) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

306. *Enfin, on donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC *, *l'angle* A *de* 73 *deg.* 10 *min. l'angle* C *de* 52 *deg.* 30 *min. avec le côté* AB *de* 49 *deg.* 26 *min. & il faut trouver l'autre côté* AC. * Fig. 141.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit encore (c) passer par la partie dont on cherche la valeur, puisqu'il n'y a encore que deux des parties connues qui soient de suite; sçavoir l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on (c) N. 297.

† *Voyez la Note du No 300.*

ſuppoſe un arc BD d'un grand cercle, tiré du ſommet de l'angle B, perpendiculairement au côté demandé AC, cet arc formera avec ce même côté AC, & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, qui ſeront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui eſt donné, avec l'hypoténuſe AB qui eſt auſſi donnée. Ainſi, l'on trouvera le côté AD (*a*), & le côté BD (*b*). On cherchera enſuite (*c*) le côté DC du ſecond de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'angle C qui eſt auſſi donné, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie AD & DC du côté demandé AC; & par conſéquent, celle de ce côté demandé. Ainſi:

(*a*) N. 284.
(*b*) N. 263.
(*c*) N. 277.

(*d*) N. 284.

Premiérement, (*d*)

Complément du logarithme du ſinus du complément de l'angle A *donné de* 73 *deg.* 10 *min.* - -	0.5382184
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuſe AB *donnée de* 49 *deg.* 26 *min.* - -	9.9325220
Logarithme de la tangente du complément du côté AD	10.4707404

(*e*) N. 103.

qui (*e*) donne 71 deg. 18 min. 39 ſec. $\frac{2}{3}$ *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conſéquent, 18 deg. 41 min 20 ſec. $\frac{1}{3}$ *p. m.* pour celle de ce côté.

(*f*) N. 263.

Secondement, (*f*)

Logarithme du ſinus de l'angle A *donné de* 73 *deg.* 10 *min.* - - - - -	9.9809805
Logarithme du ſinus de l'hypoténuſe AB *donnée de* 49 *deg.* 26 *min.* - - - -	9.8806134
Logarithme du ſinus du côté BD - - -	19.8615939

(*g*) N. 103.

qui (*g*) donne 46 deg. 38 min. 37 ſec. $\frac{2}{3}$ *p. p.* pour la valeur de ce côté.

Troisiémement, (a) (a) N. 277.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle C donné de 52 deg. 30 min. - - -	9.8849805
Logarithme de la tangente du côté BD *trouvé de 46 deg. 38 min. 37 sec.* $\frac{2}{5}$ - - -	10.0249332
Logarithme du sinus du côté CD - - -	19.9099137

qui (b) donne 54 deg. 21 min. 27 sec. *p. p.* pour la valeur de ce côté; laquelle étant ajoûtée à la valeur du côté AD, trouvée (b) N. 103. de 18 deg. 41 m. 20 s. $\frac{1}{5}$, donnera 73 deg. 2 m. 47 sec. $\frac{1}{5}$ *p. p.* pour celle du côté demandé AC.

SCHOLIE.

307. *Suivant ce que nous avons démontré au* N° 257, la tangente de l'angle C * est à la * Fig. 141. tangente de l'angle A, comme le sinus du segment AD est au sinus du segment DC. *Ainsi, après avoir trouvé* (c) *le segment* AD, *on pourra* (c) N. 306. *chercher immédiatement le segment* DC, *de la maniére suivante, qui est la plus courte.*

Complément du logarithme de la tangente de l'angle C donné de 52 deg. 30 min. - - - - -	9.8849805
Logarithme de la tangente de l'angle A donné de 73 deg. 10 min. - - -	10.5191989
Logarithme du sinus du segment AD trouvé de 18 deg. 41 min. 20 sec. $\frac{1}{5}$ - - -	9.5057342
Logarithme du sinus du segment DC - - -	29.9099136

qui ne differe que de une unité † *de celui que l'on a trouvé au* N° 306; & *qui* (d) *donne par conséquent le même nombre* 54 *deg.* (d) N. 103. 21 *min.* 27 *sec.* p. p. *pour la valeur de ce segment.*

SECOND CAS.

308. *Lorsque toutes les parties connues du triangle proposé sont de suite.*

† *Voyez la Note du N.* 300.

309. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC *, *l'angle* A *de* 53 *deg.* 17 *min. l'angle* B *de* 82 *deg.* 20 *min. avec le côté* AB *de* 65 *deg.* 12 *min. & il faut trouver l'autre angle* C.

* Fig. 142.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point passer (*a*) par la partie dont on cherche la valeur; puisque toutes les parties connues, qui sont l'angle A, le côté AB, & l'angle B, sont de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc d'un grand cercle passe par l'un quelconque des angles A & B, par exemple par l'angle B; & forme avec les côtés AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoît l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera l'angle ABD (*b*), & le côté BD (*c*). Mais, l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, est la différence de cet angle ABD à l'angle B qui est donné; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, un angle avec un côté; & par conséquent, on trouvera (*d*) l'autre angle C, qui est l'angle demandé. Ainsi.

(*a*) N. 297.
(*b*) N. 283.
(*c*) N. 263.
(*d*) N. 274.

Premiérement, (*e*)

(*e*) N. 283.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse AB *donnée de* 65 *deg.* 12 *min.* -	0.3773176
Logarithme de la tangente du complément de l'angle A *donné de* 53 *deg.* 17 *min.* - -	9.8726396
Logarithme de la tangente de l'angle ABD -	10.2499572

qui (*f*) donne 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ *p. p.* pour la valeur de

(*f*) N. 103.

le cet angle ; laquelle étant retranchée de l'angle B, qui est donné de 82 deg. 20 min. laisse 21 deg. 41 min. 11 sec. ¾ p. m. pour celle de l'angle CBD.

Secondement, (a)

(a) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de* 53 *deg.* 17 *min.* - - - -	9.9035587
Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de* 65 *deg.* 12 *min.* - - -	9.9579794
Logarithme du sinus du côté BD - - -	19.8615381

qui (b) donne 46 deg. 41 min. 31 sec. p. m. pour la valeur de ce côté. (b) N. 103.

Troisiémement, (c)

(c) N. 274.

Logarithme du sinus de l'angle CBD *trouvé de* 21 *deg.* 41 *min.* 11 *sec.* ¾ - - -	9.5676490
Logarithme du sinus du complément du côté BD *trouvé de* 46 *deg.* 41 *min.* 31 *sec.* - - -	9.8362738
Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - -	19.4039228

qui (d) donne 14 deg. 40 min. 58 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 75 deg. 19 min, 2 sec. p. m. pour celle de cet angle demandé. (d) N. 103.

SCHOLIE I.

310. *Suivant ce que nous avons démontré au* Nº 253, le sinus de l'angle au sommet ABD * est au sinus de l'autre angle au sommet CBD, comme le sinus du complément de l'angle A est au sinus du complément de l'angle C. *Ainsi, après avoir trouvé* (e) *chaque angle* ABD & CBD, *on pourra chercher immédiatement l'angle* C, *de la maniére suivante, qui est la plus courte.*

* Fig. 142.

(e) N. 309.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ABD trouvé de 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ -	0.0596758
Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de 21 deg. 41 min. 11 sec. $\frac{3}{4}$ - - - - - - -	9.5676490
Logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 53 deg. 17 min. - - - - -	9.7765983
Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - - -	19.4039231

qui surpasse de trois unités † *celui que l'on a trouvé au N° 309: mais qui* (a) *donne le même nombre 14 deg. 40 min. 58 sec. p. p. pour la valeur de ce complément.*

(a) N. 103.

SCHOLIE II.

311. *Quoique, après ce que nous avons démontré au N° 301, on ne doive avoir aucune difficulté lorsque l'arc perpendiculaire passe hors du triangle, nous allons cependant en proposer encore un exemple.*

* Fig. 143.

Soit un triangle Sphérique obliquangle ABC*, *dont on donne l'angle* BAC *de* 126 *deg.* 43 *min. l'angle* ABC *de* 82 *d.* 20 *m. avec le côté* AB *de* 65 *d.* 12 *m. & dont il faut trouver l'angle* C.

(b) N. 297.

On pourroit supposer (b) *que l'arc perpendic. passe par l'angle obtus* A; *& alors on trouveroit l'angle* C, *de la même maniére dont on l'a fait dans les N^os précedents*, 309 *&* 310. *Mais nous supposons que cet arc passe par l'angle* B, *afin de donner des exemples de tous les différents cas qui peuvent se rencontrer. Ceci supposé:*

(c) N. 198.

1^ent *Dans le triangle* ABD *qui est rectangle en* D, *on connoît l'angle* BAD; *puisque* (c) *cet angle est le supplément de l'angle* BAC *qui est donné de* 126 *deg.* 43 *min. On connoît aussi*

† Voyez la Note du N° 300.

l'hypoténuse AB *qui est donnée. Ainsi, l'on trouvera (a) l'angle* ABD *de* 60 *deg.* 38 *m.* 48 *f.* $\frac{1}{4}$ p. p. (a) N. 283.
& (b) *le côté* BD *de* 46 *deg.* 41 *min.* 31 *sec.* (b) N. 263.
p. m. *de même qu'on les a trouvés au* N° 309.

2^ent *On ajoûtera cet angle* ABD *à l'angle* ABC *qui est donné de* 82 *deg.* 20 *min. au lieu de l'en retrancher, comme on a fait au même* No 309; *& l'on aura l'angle* CBD *de* 142 *deg.* 58 *min.* 48 *sec.* $\frac{1}{4}$

3^ent *Enfin, on cherchera* (c) *l'angle* C *du* (c) N. 274.
triangle CBD, *de la manière suivante, qui est la même que celle du* N° 309.

Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de 142 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ - - - - - -	9.7796634
Logarithme du sinus du complément du côté BD trouvé de 46 deg. 41 min. 31 sec. - - -	9.8362738
Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - -	19.6159372

qui (d) *donnera* 24 *deg.* 23 *min.* 34 *sec.* p. p. *pour la valeur de* (d) N. 103.
ce complément ; & par conséquent, 65 *deg.* 36 *min.* 26 *sec.* p. m. *pour celle de cet angle demandé.*

Mais, si après avoir trouvé chaque angle ABD *&* CBD, *on veut chercher immédiatement l'angle* C, *on peut le faire de la manière suivante, qui est la même que celle de la scholie précédente* (e). (e) N. 310.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ABD trouvé de 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ -	0.0596758
Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de 142 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ - - - -	9.7796634
Logarithme du sinus du complément de l'angle BAC donné de 126 deg. 43 min. - - -	9.7765983
Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - - -	29.6159375

qui ne surpasse que de trois unités † *celui que l'on a trouvé par*

† Voyez la Note du N° 300.

(a) N. 103. *le calcul précedent; & qui (c) donne par conséquent le même nombre 24 deg. 23 min. 34 sec.* p. p. *pour la valeur de ce complément.*

On peut remarquer que c'est la même chose de résoudre le triangle proposé ABC, *ou le triangle* ABE *formé par les côtés* BC *&* AC *du premier, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point* E.

AUTRE EXEMPLE.

312. *On donne dans le triangle-Sphérique*
* Fig. 144. *obliquangle* ABC *, *le côté* AB *de* 55 *deg.* 41 *min. le côté* AC *de* 74 *deg.* 53 *min. avec l'angle* A *de* 47 *deg.* 18 *min. & il faut trouver l'autre côté* BC.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc per-
(b) N. 297. pendiculaire ne doit point encore (*b*) passer par la partie dont on cherche la valeur; puisque toutes les parties connues, qui sont le côté AB, l'angle A, & le côté AC, sont encore de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc d'un grand cercle passe par l'un quelconque des côtés AB & AC, par exemple par le côté AC; & forme avec ce même côté & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoît l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera le côté
(c) N. 284. AD (*c*), & le côté BD (*d*). Mais, le côté DC
(d) N. 263. du second de ces deux mêmes triangles, est la

différence de ce côté AD au côté AC qui est donné ; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, les côtés BD & DC ; & par conséquent, on trouvera (a) l'hypoténuse BC, qui est le côté demandé. Ainsi : (a) N. 266.

Premiérement, (b) (b) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A *donné de 47 deg. 18 min.* - - -	0.1686680
Logarithme de la tangente du complement de l'hypoténuse AB *donnée de 55 deg. 41 min.* - -	9.8341536
Logarithme de la tangente du complément du côté AD	10.0028216

qui (c) donne 45 deg. 11 min. 10 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 44 deg. 48 min. 50 sec. *p. m.* pour celle de ce côté ; laquelle étant retranchée du côté AC, qui est donné de 74 deg. 53 min. laisse 30 deg. 4 min. 10 sec. pour la valeur du côté DC. (c) N. 103.

Secondement, (d) (d) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de 47 deg. 18 min.* - - - - - -	9.8662369
Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de 55 deg. 41 min.* - - - - -	9.9169455
Logarithme du sinus du côté BD - - - -	19.7831824

qui (e) donne 37 deg. 22 min. 20 sec. *p. p.* pour la valeur de ce côté. (e) N. 103.

Troisiémement, (f) (f) N. 266.

Logarithme du sinus du complément du côté BD *trouvé de 37 deg. 22 min. 20 sec.* - -	9.9002081
Logarithme du sinus du complément du côté DC *trouvé de 30 deg. 4 min. 10 sec.* - - - - -	9.9372263
Logarithme du sinus du complément du côté demandé BC - - - - - -	19.8374344

qui (g) donne 43 deg. 27 min. 10 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 46 deg. 32 min 50 sec. *p. p.* pour celle de côté. (g) N. 103.

SCHOLIE.

313. *Suivant ce que nous avons démontré au N° 254*, le sinus du complément du segment AD * est au sinus du complément du segment DC, comme le sinus du complément du côté AB est au sinus du complément du côté BC. *Ainsi, après avoir trouvé (a) chaque segment* AD *&* DC, *on pourra chercher immédiatement le côté* BC, *de la maniére suivante, qui est la plus courte.*

* Fig. 144.
(a) N. 312.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment AD trouvé de 44 deg. 48 min. 50 sec. - - - - - - -	0.1491089
Logarithme du sinus du complément du segment DC trouvé de 30 deg. 4 min. 10 sec. - -	9.9372263
Logarithme du sinus du complément du côté AB donné de 55 deg. 41 min. - - -	9.7510991
Logarithme du sinus du complément du côté demandé BC - - - - - - - - - - - - -	19.8374343

qui ne diffère que d'une unité † *de celui que l'on a trouvé au N° précedent ; & qui (b) donne par conséquent le même nombre* 43 *deg.* 27 *min.* 10 *sec.* p. m. *pour la valeur de ce complément.*

(b) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

314. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle* ABC *, *l'angle* A *de* 50 *deg. l'angle* B *de* 117 *deg.* 24 *min. avec le côté* AB *de* 61 *deg.* 28 *min. & il faut trouver l'autre côté* BC.

* Fig. 145.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point encore (c) passer par la partie dont on cherche la valeur ; puisque

(c) N. 297.

† *Voyez la Note du N°* 300.

toutes les parties connues, qui sont l'angle A, le côté AB, & l'angle B, sont encore de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B †, & forme avec les côtés AB, AC & BC, deux autres triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoît l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera l'angle ABD (*a*), & le côté BD (*b*). (a) N. 283. (b) N. 263.
Mais, l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, est la différence de cet angle ABD à l'angle B qui est aussi donné; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, un angle avec un côté; & par conséquent, on trouvera (*c*) l'hypoténuse BC, qui est le côté demandé. Ainsi: (c) N. 285.

Premiérement, (*d*) (d) N. 283.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse AB *donnée de* 61 *deg.* 28 *min.* - -	0.3208721
Logarithme de la tangente du complément de l'angle A *donné de* 50 *deg.* - - - - - - - - - -	9.9238135
Logarithme de la tangente de l'angle ABD - -	10.2446856

qui (*e*) donne 60 deg. 20 min. 55 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle; laquelle étant retranchée de celle de l'angle B, qui est donné de 117 deg. 24 min. laisse 57 deg. 3 min. 5. sec. *p. m.* pour la valeur de l'angle CBD. (e) N. 209.

† Il n'est point libre ici de faire passer l'arc perpendiculaire par celui des angles B & C que l'on veut; puisque si l'on supposoit que cet arc fût tiré de l'angle C, on ne connoîtroit qu'un angle de plus que l'angle droit, dans chacun des triangles qu'il formeroit avec les côtés AB, AC & BC; & par conséquent, on ne pourroit résoudre aucun de ces triangles.

(a) N. 263. Secondement, (a)

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de* 50 *deg.*	9.8842540
Logar. du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de* 61 *d.* 28 *min.* - - - - - - - - - - - - - -	9.9437612
Logarithme du sinus du côté BD - - - -	19.8280152

(b) N. 103. qui (b) donne 42 deg. 17 min. 56 sec.⅗ *p. m.* pour la valeur de ce côté.

(c) N. 285. Troisiémement, (c)

Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD *trouvé de* 57 *deg.* 3 *min.* 5 *sec.* - - - -	9.7355083
Logarithme de la tangente du complément du côté BD *trouvé de* 42 *deg.* 17 *min.* 56 *sec.*⅗ - -	10.0410062
Logarithme de la tangente du complément du côté demandé BC - - - - - - - - - - - -	19.7765145

(d) N. 103. qui (d) donne 30 deg. 52 min. 7 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 59 deg. 7 min. 53 sec. *p. p.* pour celle de ce côté.

SCHOLIE.

315. *Suivant ce que nous avons démontré au N°* 256, le sinus du complément de l'angle au sommet ABD * est au sinus du complément de l'autre angle au sommet CBD, comme la tangente du complément du côté AB est à la tangente du complément du côté BC. *Ainsi, après avoir trouvé* (e) *chaque angle* ABD *&* CBD, *on pourra chercher immédiatement le côté* BC, *de la maniére suivante, qui est la plus courte.*

* Fig. 145.

(e) N. 314.

Complément

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle ABD trouvé de 60 deg. 20 min. 55 sec. - - - - - - - - - - - - - -	0.3056393
Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD trouvé de 57 deg. 3 min. 5 sec. - -	9.7355083
Logarithme de la tangente du complément du côté AB donné de 61 deg. 28 min. - - - -	9.7353667
Logarithme de la tangente du complément du côté demandé BC - - - - - - - - - - - -	19.7765143

qui differe de deux unités † *de celui que l'on a trouvé au* N° 314 : *mais qui* (*a*) *donne le même nombre* 30 *deg.* 52 *min.* 7 *sec.* p. m. *pour la valeur de ce complément.* (a) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

316. *Enfin, on donne dans le triangle Sphérique obliquangle* ABC*, *le côté* AB *de* 58 *d.* 32 *m. le côté* AC *de* 69 *deg.* 54 *min. avec l'angle* A *de* 43 *deg.* 27 *min. & il faut trouver l'autre angle* C. * Fig. 146.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point encore (*b*) passer par la partie dont on cherche la valeur ; puisque toutes les parties connues, qui sont le côté AB, l'angle A, & le côté AC, sont de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B ¶ ; & forme avec les côtés AB, AC & BC deux autres triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux (b) N. 297.

† *Voyez la Note du* N° 300.

¶ Ce triangle est dans le même cas que celui du N° précedent ; puisque si l'arc perpendiculaire étoit tiré de l'angle A, on ne connoîtroit qu'un côté de plus que l'angle droit, dans chacun des triangles qu'il formeroit avec les côtés AB, AC & BC ; & par conséquent, on ne pourroit résoudre aucun de ces triangles.

triangles, on connoît l'angle A qui est donné; avec l'hypotenuse AB qui est aussi donnée.
(a) N. 284. Ainsi, l'on trouvera le côté AD (a), & le côté
(b) N. 263. BD (b). Mais, le côté DC du second de ces deux mêmes triangles, est la différence de ce côté AD au côté AC qui est aussi donné; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, les côtés
(c) N. 276. BD & DC; & par conséquent, on trouvera (c) l'angle C, qui est l'angle demandé. Ainsi:

(d) N. 284. Premiérement, (d)

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A *donné de* 43 *deg.* 27 *min.* - - -	0.1390785
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB *donnée de* 58 *deg.* 32 *min.* - - -	9.7867520
Logarithme de la tangente du complément du côté AD	9.9258305

(e) N. 103. qui (e) donne 40 deg. 7 min. 52 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 49 deg. 52 min. 8 sec. *p. p.* pour celle de ce côté; laquelle étant retranchée du côté AC, qui est donné de 69 deg. 54 min. laisse 20 deg. 1 min. 52 sec. *p. m.* pour la valeur du côté DC.

(f) N. 263. Secondement, (f)

Logarithme du sinus de l'angle A *donné de* 43 *deg.* 27 *min.* - - - - - - - - - - - - - - -	9.8374125
Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB *donnée de* 58 *deg.* 32 *min.* - - - - - - - - - -	9.9309205
Logarithme du sinus du côté BD - - - - - -	19.7683330

(g) N. 103. qui (g) donne 35 d. 54 m. 54 sec. $\frac{3}{4}$ *p. p.* pour la valeur de ce côté.

(h) N. 276. Troisiémement, (h)

Complément du logarithme du sinus du côté DC *trouvé de* 20 *deg.* 1 *min.* 52 *sec.* - - - -	0.4653010
Logarithme de la tangente du côté BD *trouvé de* 35 *deg.* 54 *min.* 54 *sec.* $\frac{3}{4}$ - - - - - - - -	9.8599088
Logarithme de la tangente de l'angle demandé C	10.3252098

(i) N. 103. qui (i) donne 64 deg. 41 min. 22 sec. *p. p.* pour la valeur de cet angle.

SCHOLIE I.

317. *Enfin, suivant ce que nous avons démontré au N° 257*, le sinus du segment DC* est au sinus du segment AD, comme la tangente de l'angle A est à la tangente de l'angle C. *Ainsi, après avoir trouvé (a) chaque segment* AD *&* DC, *on pourra chercher immédiatement l'angle* C, *de la manière suivante, qui est la plus courte.* *Fig. 146. (a) N. 316.

Complément du logarithme du sinus du segment DC trouvé de 20 deg. 1 min. 52 sec. - -	0.4653010
Logarithme du sinus du segment AD trouvé de 49 deg. 52 min. 8 sec. - - - - - - -	9.8834181
Logarithme de la tangente de l'angle A donné de 43 deg. 27 min. - - - - - - - - - - -	9.9764909
Logarithme de la tangente de l'angle demandé C	20.3252100

qui surpasse de deux unités † *celui que l'on a trouvé au N° 316: mais qui (b) donne le même nombre 64 deg. 41 min. 22 sec. p. p. pour la valeur de cet angle.* (b) N. 103.

SCHOLIE II.

318. *On peut remarquer, par les différents exemples que nous venons de donner sur la résolution des triangles-Sphériques obliquangles: 1ent, que les parties usuelles de ces sortes de triangles ne peuvent être combinées que de douze maniéres différentes: 2ent que de ces douze maniéres, deux dépendent du N° 250; deux du N° 258; & huit de la résolution des triangles-Sphériques rectangles, & des corollaires des Nos 250 & 255.*

† Voyez la Note du N° 300.

CHAPITRE III.

De la maniére de faire les obſervations qui ſervent de fondement à l'Aſtronomie.

IL ne nous reſte plus pour rendre ce Traité complet, qu'à appliquer à l'Aſtronomie ce que nous venons de démontrer des triangles Sphériques, dans les chapitres précedents. Mais, comme les parties de ces triangles, que nous donnerons pour connues dans les différents uſages que nous allons propoſer, n'auront pû l'être que par des obſervations, nous croyons faire plaiſir aux perſonnes qui veulent s'adonner à l'Aſtronomie, & particuliérement à celles qui demeurent en Province, & qui peuvent ſe faire de cette ſcience un amuſement auſſi agréable qu'utile, en leur apprenant la maniére dont on doit faire ces obſervations. Ainſi :

PROBLESME I.

319. *Obſerver la hauteur apparente* † *d'une Etoile quelconque.*

* Fig. 147. Il faut obſerver la hauteur apparente HCS* de l'Etoile S.

† On appelle *hauteur apparente* d'un point du ciel quelconque S, un angle HCS formé par le rayon Lriſé CS tiré du centre C de l'horiſon ſenſible à ce point, & par la commune ſection HR des plans de cet horiſon & du *cercle vertical* § qui paſſe par ce point.

Solution. Disposez un *Quart de cercle* ABC † [de] maniere que le fil CP qui est tendu libre[m]ent par le poids P, rase, c'est-à-dire, touche [lé]gerement, la surface du limbe ADB de cet [in]strument. Dirigez-le ensuite vers l'Etoile pro[po]sée S; & le faites tourner sur son axe C, jus[q]u'à ce que vous apperceviez cette Etoile [da]ns l'interséction des soies qui s'entrecou[pe]nt au centre E de la lentille objéctive de la [lu]nette BC. Enfin, en laissant cette lunette dans [ce]tte situation, observez le nombre que le fil CP indiquera sur le limbe ADB; & ce nombre sera celui des degrés, & parties de degrés, que contiendra la hauteur demandée HCS.

Démonstr. Le fil CP est dans le plan du vertical ¶ qui passe par l'Etoile proposée S; puisque étant librement tendu par un poids P, il est une partie de l'axe commun ZN de tous les verticaux. Or, le rayon visuel BCS est aussi dans le plan du même vertical; puisqu'il est tiré par le point C de ce fil à un point S de ce

† Nous ne donnons point ici la description du *Quart de cercle*, parce que la figure 147 fait assez connoître cet instrument. Il doit avoir aux environs de 2 pieds ½ de rayon.

¶ On appelle *Cercle vertical*, ou *Azimuth*, chaque grand cercle de la Sphére qui passe par le Zenith; & qui par conséquent, est perpendiculaire à l'horison. On donne à chaque vertical le nom du degré de l'horison par lequel il passe, en commençant à compter du point auquel le méridien coupe ce dernier cercle vers le Sud. Il faut cependant remarquer que le vertical qui passe par les points du vrai orient & du vrai occident, se nomme quelquefois le *premier vertical*; & que celui qui passe par les Pôles du monde, se nomme le *méridien*.

plan †. Donc, puisque [c] le quart de cercle ABC est dans le plan & de ce fil, & de ce rayon visuel, il est dans le plan du vertical qui passe par l'Etoile proposée S; & par conséquent, l'angle HCS que l'axe de la lunette BC, où le rayon visuel BCS, forme avec la commune section HR de ce vertical & de l'horison sensible; est la hauteur apparente de cette Etoile. Mais, l'angle HCS est égal à l'angle ACD; puisque le même angle ACH est également la différence du premier à l'angle droit ACS, & du dernier à l'angle droit DCH: & le fil CP marque au point D le nombre des degrés que contient l'arc AD, qui est la mesure de cet angle ACD. Donc, le fil CP indique aussi au point D le nombre des degrés que contient l'angle HCS; & par conséquent, la hauteur demandée HCS. Donc, C. Q. F. F.

PROBLESME II.

320. *Observer la vraie hauteur d'une Etoile quelconque, sur l'horison sensible.*

Solution. Observez la hauteur apparente de l'Etoile proposée, de la maniére dont nous venons de dire dans le problême précedent (a) qu'il faut le faire. Retranchez ensuite de la hauteur que vous aurez trouvée, ce qu'il con-

(a) N. 319.

† Nous supposons pour la facilité de la démonstration, que le point C auquel le fil CD est suspendu, est un point de l'axe de la lunette BC.

viendra d'en ôter pour la *Réfraction* †, suivant la Table que nous en avons donnée à la fin de ce Traité; & le reste sera la hauteur demandée.

PROBLESME III.

321. *Tracer une ligne méridienne* ¶, *sur un plan horisontal.*

Il faut tracer une ligne méridienne, sur le plan horisontal X. * * Fig. 149.

Solution. Après vous être assuré par le moyen du niveau dont les maçons se servent ordinairement, ou d'une autre maniére, que le plan proposé est parfaitement de niveau, & en avoir réparé les défauts, s'il s'y en rencontre,

† Lorsque l'on regarde au ciel un objet quelconque S *, le rayon visuel tiré de l'œil du spectateur à cet objet n'est point une ligne droite AS. Ce rayon se brise & forme un angle, en passant de l'air grossier dans l'*Æter*; ou plutôt, change de direction à mesure qu'il passe d'un air plus épais dans un air qui l'est moins, & forme une ligne courbe ABS, de maniére que l'objet paroît être plus élevé qu'il ne l'est en effet; parce que l'œil qui le voit par le rayon AB, le croit au point *s*, pendant qu'il n'est effectivement qu'au point S. Or, cette différence entre le lieu auquel on voit un objet, & celui auquel on le verroit, si le rayon visuel ne se détournoit pas de la ligne droite, est ce que l'on appelle *Réfraction*; laquelle est mesurée par l'angle BAS, & varie, non-seulement à proportion du plus ou du moins d'élévation de l'objet sur l'horison; mais aussi à proportion du degré d'épaisseur de l'air qui est interposé entre l'œil & l'objet. On a calculé plusieurs Tables de ces différences, & nous en donnons une à la fin de ce Traité. Mais il faut remarquer que dans ces Tables, on n'a égard qu'aux différents degrés de hauteur; parce que l'air que le rayon visuel a à traverser, n'étant pas constamment par-tout le même que celui qui environne le Spectateur, & le Barométre ne pouvant déterminer la qualité que de celui dans lequel il est placé, il n'est guére possible d'établir quelque chose de certain sur les différences que la qualité de l'air peut causer dans les réfractions. * Fig. 148.

¶ On appelle *ligne méridienne-horisontale*, la commune section des plans du méridien & de l'horison sensible.

posez sur ce plan un quart de ce cercle ABC; & observez (*a*) la hauteur apparente ACP d'une Etoile quelconque S située dans la partie orientale du ciel. Prenez ensuite un fil DE chargé d'un plomb E terminé en pointe, & laissant le quart de cercle dans la position où il étoit lorsque vous avez apperçu l'Etoile S dans l'intersection des soies de la lunette BC, faites suspendre ce fil à quelque distance du bout C de cette lunette, de maniére que vous le voyiez dans l'intersection des mêmes soies précédentes. Marquez exactement le point F auquel le plomb E rencontre le plan X. Déterminez encore un autre point G sur le même plan X, de la même maniére dont vous venez d'y déterminer le point F, & qui soit éloigné de ce dernier d'environ 3 ou 4 toises. Attendez ensuite que la même Etoile S soit passée dans l'hémisphere occidental; & lorsque vous l'estimerez être à peu près à la même hauteur à laquelle vous l'avez observée dans l'hémisphere oriental, dirigez-y la lunette *b*C. Elevez peu à peu le bout *b* de cette lunette à mesure que cette Etoile s'abbaissera; & suivez-la attentivement, jusqu'à ce que vous la voyiez sous un angle *a*CP précisément égal à celui sous lequel vous l'avez observée au point S. Laissez le quart de cercle dans cette position; & déterminez deux points *f* & *g* sur le même plan précedent X, de la même maniére dont vous y avez deja déterminé les points F & G.

(*a*) N. 319.

Otez

Otez le quart de cercle ABC, & tirez par les points G & F une ligne droite indéfinie GF. Tirez aussi par les points g & *f* une autre ligne droite *gf*, qui rencontre la précédente en un point H. Enfin, divisez (*a*) en deux parties égales par une ligne droite MR, l'angle GHg formé par les lignes GH & *g*H ; & cette ligne MR sera la Méridienne demandée.

(*a*) E. l. 1. p. 5.

Démonstr. Suivant ce que nous avons démontré dans le problême précedent (*b*), le rayon visuel BCS est dans le plan du vertical qui passe par l'Etoile S. Ainsi, puisque [c] le fil DE est perpendiculaire au plan horisontal X, & dans l'alignement de ce rayon visuel, il est une perpendiculaire abbaissée d'un point du plan du vertical qui passe par l'Etoile S au plan horisontal X ; & par conséquent (*c*) le point F auquel il rencontre ce dernier plan, est un point de la commune section de ces deux plans. Or, par des raisons pareilles, le point G est aussi un point de cette commune section. Donc, la ligne droite GFH qui passe par ces deux points, est cette commune section. Et l'on démontre de la même maniére, que la ligne droite *gf*H est la commune section du plan du vertical qui passe par la même Etoile S située au point *s*, & du même plan précedent X. Mais, puisque [c] les points S & *s* sont également élevés sur l'horison, ils sont également éloignés du Méridien. Ainsi, les angles que le Méridien forme avec les verticaux qui

(*b*) N. 312.

(*c*) E. l. 11. p. 38.

paſſent par ces points, ſont égaux ; & par conſéquent, les angles que la commune ſection de ce même Méridien & du plan horiſontal X forme avec les communes ſections GFH & gfH de ces mêmes verticaux & de ce même plan horiſontal X, ſont auſſi égaux. Or, la ligne MR qui [c] diviſe l'angle GHg en deux parties égales, eſt la ſeule ligne qui puiſſe former dans le plan X, des angles égaux avec les communes ſections GFH & gfH. Donc, cette ligne eſt la commune ſection du Méridien & de ce plan ; & par conſéquent, elle eſt la Méridienne demandée. Donc, C. Q. F. F.

PROBLESME IV.

322. *Placer un quart de cercle dans le plan du Méridien.*

*Fig. 150. Il faut placer le quart de cercle ABC * dans le plan du Méridien.

Solution. Suſpendez au deſſus de la ligne méridienne MR deux fils DE & GH qui ſoient éloignés l'un de l'autre de quelques toiſes, & diſpoſés de maniére qu'étant librement tendus, l'un par le plomb E, & l'autre par le plomb H, les pointes de ces plombs rencontrent cette ligne, l'une en un point F, & l'autre en un point I. Poſez enſuite ſur cette même ligne, à une toiſe ou deux environ de diſtance du fil DE, le quart de cercle ABC ; & l'y diſpoſez de maniére que le fil CP touchant légerement la ſurface du limbe AB, la ſoie verticale de la lunette BC, le fil DE, & le fil GH, ſoient cha-

cun dans le même rayon visuel BCK; c'est-à-dire, se couvrent les uns les autres lorsqu'on les regarde au travers de la lunette BC. Enfin, fixez cet instrument dans cette position lorsque vous serez parvenu à la rencontrer; & il sera dans le plan du Méridien.

Démonstr. Le fil DE qui est perpendiculaire au plan de l'horison, puisque [c] il est tendu librement par un poids E, passe par un point F de la commune section MR de ce plan & du Méridien (*a*). Ainsi, il est dans le plan du Méridien; & par conséquent, puisque par des raisons pareilles le fil GH y est aussi, l'axe de la lunette BC, c'est-à-dire le rayon visuel BCK, qui [c] passe par ces deux fils, est aussi dans le plan de ce même Méridien. Or, puisque le rayon visuel BCK est dans le plan du Méridien, le fil CP qui [c] est une perpendiculaire tirée du point C de ce rayon visuel à l'horison, y est aussi. Ainsi, puisque le quart de cercle ABC est [c] dans le plan de ce même rayon visuel & de cette perpendiculaire, il est aussi dans celui du Méridien; & par conséquent on a fait C. Q. F. F.

(*a*) N. 321.

SCHOLIE.

323. *Lorsque l'on aura tracé une ligne méridienne, suivant ce qui est enseigné dans le problême précedent (b), il sera bon de se servir de celui-ci pour s'assurer de sa justesse. Or, pour cet effet, on placera un quart de cercle dans le plan du Méridien, de la maniére dont on a dit*

(*b*) N. 321.

dans ce problême qu'il faut le faire. On observera ensuite avec ce quart de cercle ainsi disposé, deux hauteurs correspondantes d'une Etoile quelconque; afin de tracer une ligne méridienne, de la même maniére dont on a tracé celle du N° 321; & si cette Méridienne, & celle que l'on veut vérifier, ne forment qu'une seule & même ligne droite, on sera assuré d'avoir operé juste.

PROBLESME V.

324. *Observer * le diamétre apparent † du Soleil, ou de la Lune.*

Solution. Après avoir disposé dans le plan du Méridien (*a*) un quart de cercle qui ait environ 3 pieds de rayon, afin que l'on puisse y distinguer les secondes, & l'avoir fixé dans cette position, attendez le moment auquel la planette dont vous vous proposez de mesurer le diamétre, passera par ce cercle; & à l'instant de son passage, observez (*b*) la hauteur apparente de son bord inférieur, & celle de son bord supérieur ¶. Retranchez ensuite de chacune de ces hauteurs ce qu'il sera nécessaire d'en ôter pour les réfractions, suivant la Table

(*a*) N. 322.

(*b*) N. 319.

* Lorsque l'on veut observer le Soleil, il faut se servir de verres colorés, ou noircis à la fumée d'une lampe, de crainte de se blesser les yeux.

† On appelle *diamétre apparent* d'une Planette quelconque, l'angle sous lequel on apperçoit cette planette; c'est-à-dire, l'angle formé par les rayons visuels tirés de l'œil du spectateur aux extrémités du diamétre de cette planette.

¶ Pour observer la hauteur apparente de l'un des bords du disque d'une planette, il faut disposer le quart de cercle de maniére que la soie horisontale de la lunette paroisse une tangente à ce bord.

que nous en donnons à la fin de ce Traité. Enfin, de la plus grande de ces hauteurs corrigées, ôtez-en la plus petite ; & le reste sera le diamétre apparent de la planette proposée : ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

SCHOLIE.

325. *Cette méthode par laquelle on mesure assez exactement les diamétres apparents du Soleil & de la Lune, ne peut point servir à trouver ceux des autres planettes ; parce que ces derniers ne forment point des angles assez sensibles pour pouvoir être mesurés avec les instrumens ordinaires. Ainsi, ce n'est que par d'autres moyens que l'on est parvenu à les connoître. Mais, comme ce n'est point ici le lieu de traiter de ces différents moyens, nous avertirons seulement que* M. Huygens † *a déterminé le diamétre apparent de l'anneau de Saturne, de* 1 *min.* 8 *sec. celui du globe de Saturne, de* 30 *sec. celui de Jupiter, de* 1 *min.* 4 *sec. celui de Mars, de* 30 *sec. celui de Venus, de* 1 *min.* 25 *s. & qu'il n'a rien décidé de celui de Mercure, à cause de son extrême petitesse. Mais* Hevelius *qui a observé cette planette sur le disque du Soleil, a trouvé son diamétre de* 11 *s. A l'égard des diamétres du Soleil & de la Lune, leur grandeur varie très-sensiblement, de manière que le plus petit diamétre apparent du Soleil est de* 31 *min.* 38 *sec. le plus grand, de* 32 *min.* 43 *sec. ; le plus petit diamétre apparent de la*

† Systh. Saturn. *fol.* 82.

Lune, de 29 min 30 sec. & le plus grand, de 33 min. 30 sec.

PROBLESME VI.

326. *Observer la vraie hauteur † d'une Planette quelconque, sur l'horison sensible.*

(a) N. 324. *Solution.* Observez (*a*) la hauteur apparente du bord ou inférieur, ou supérieur, de la Planette proposée. Retranchez ensuite de cette hauteur ce qu'il convient d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité. Enfin, si vous avez observé la hauteur du bord inférieur, ajoûtez au reste le demi-diamétre de la Planette proposée : mais si vous avez observé la hauteur du bord supérieur, retranchez de ce reste le même demi-diamétre ; & la somme, ou le reste, sera la hauteur demandée.

Mais si l'on ne connoît point le diamétre de
(b) N. 324. la Planette proposée, il faudra alors observer (*b*) la hauteur apparente du bord inférieur de cette planette, & celle de son bord supérieur. On retranchera ensuite de chacune de ces hauteurs ce qu'il conviendra d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité. Enfin, on ajoûtera les restes, & la moitié de leur somme sera la hauteur demandée.

PROBLESME VII.

327. *Observer la vraie hauteur méridienne d'un Astre quelconque, sur l'horison sensible.*

† Par la *hauteur* d'une Planette sur l'horison sensible, on entend la vraie hauteur du centre de cette planette sur cet horison.

Solution. Après avoir placé (*a*) un quart de cercle dans le plan du Méridien, & l'avoir fixé dans cette position, attendez le moment auquel l'astre proposé passera par ce cercle. A l'instant de son passage, observez (*b*) sa vraie hauteur, avec cet instrument ainsi disposé; & cette hauteur sera la hauteur demandée.

(*a*) N. 322.
(*b*) N. 320. ou 326.

PROBLESME VIII.

328. *Observer la hauteur du Pôle sur l'horison.*

Il faut observer la hauteur OP * du Pôle P, sur l'horison HO.

* Fig. 151.

Solution. Choisissez l'une des nuits de l'hyver † à laquelle le temps vous paroîtra le plus serein : choisissez aussi l'une quelconque des Etoiles qui sont toujours sur votre horison. Placez ensuite un quart de cercle dans le plan du Méridien (*c*); & après l'avoir rendu fixe dans cette position, observez (*d*) avec cet instrument la hauteur apparente de cette Etoile, à l'instant auquel elle passe par la partie HSP du Méridien, qui est au dessus du Pôle. Observez aussi (*e*) la hauteur apparente de la même Etoile, à l'instant auquel elle passe par la partie OsP du même Méridien, qui est au dessous du même Pôle. Retranchez ensuite la plus petite de ces deux hauteurs de la plus grande, après

(*c*) N. 322.
(*d*) N. 319.
(*e*) N. 319.

† On choisit l'hyver pour faire ces observations, parce que les nuits étant alors plus longues que les jours, on peut voir les Etoiles pendant plus de douze heures, & observer par conséquent les deux hauteurs méridiennes de celles qui ne passent jamais sous l'horison du lieu auquel l'observateur est situé.

avoir ôté de chacune ce qu'il convient d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité; & prenez la moitié SP ou *s*P, du reste SP*s*. Enfin, ajoûtez cette moitié à la plus petite O*s* de ces hauteurs corrigées, ou retranchez-la de la plus grande OS; & la somme, ou le reste, sera la hauteur demandée OP.

C'est ainsi qu'ayant trouvé à l'Observatoire de Paris la plus grande hauteur apparente de l'Etoile pôlaire † marquée α dans Bayer, *de 50 deg. 52 min. 49 sec. & la plus petite de 46 deg. 49 min. 17 sec. on en a conclu que le Pôle y est élevé de 48 deg. 50 min. 10 sec.*

Plus grande hauteur observée - - - - -	50 *d.*	52 *m.*	49 *s.*
Réfraction - - - - - -	0	0	49
Vraie hauteur méridienne - - - - - - -	50	52	0
Plus petite hauteur observée - - - - -	46	49	17
Réfraction - - - - - - -	0	0	57
Vraie hauteur méridienne - - - - - - -	46	48	20
Première hauteur méridienne - -	50	52	0
Seconde hauteur méridienne - - - -	46	48	20
Différence de ces deux hauteurs - - - - -	4	3	40
Moitié de cette différence - - - - - -	2	1	50

laquelle étant ajoûtée à 46 deg. 48 min. 20 sec. ou retranchée de 50 deg. 52 min. donne pareillement 48 deg. 50 min. 10 sec: pour la hauteur du Pôle à l'Observatoire de Paris; & par conséquent, 41 deg. 9 min. 50 sec. pour celle de l'Equateur au même endroit.

PROBLESME IX.

329. *Mesurer le diamétre de la Terre.*

Solution. Choisissez deux lieux qui soient situés sous un même Méridien, & éloignés l'un de

† C'est la derniére de la queuë de la petite Ourse.

de l'autre d'une distance raisonnable ; c'est-à-dire, d'environ 20 à 30 lieuës. Observez ensuite (a) avec le plus de précision qu'il sera possible, la hauteur du Pôle à chacun de ces lieux ; & soustrayez la plus petite hauteur de la plus grande, afin d'avoir l'amplitude de l'arc du grand cercle de la Terre qui est compris entre ces deux lieux. Enfin, mesurez (b) la distance de l'un de ces mêmes lieux à l'autre ; & le nombre de toises que contiendra cette distance, sera la valeur de cet arc.

(a) N. 318.

(b) N. 154. & 155.

Or, lorsque vous connoîtrez la valeur d'un arc d'un grand cercle de la Terre, vous trouverez par une régle de proportion, la valeur d'un degré de la circonférence de ce cercle ; celle de la circonférence entiére ; & par conséquent, celle du diamétre demandé.

C'est de cette maniére qu'ayant observé la hauteur du Pôle à Paris, de 48 deg. 50 min. 10 sec. & à Amiens, de 49 deg. 52 min. 38 sec. on a trouvé 1 deg. 2 min. 28 sec. pour l'amplitude de l'arc du grand cercle de la Terre, qui est compris entre ces deux villes qui sont situées presque sous le même méridien ; & qu'ayant ensuite mesuré (c) la distance de l'une de ces villes à l'autre, & l'ayant trouvée de 59530 toises, on a conclu que puisque 1 deg. 2 min. 28 sec. d'un grand cercle de la Terre est de 59530 toises, un degré de ce même cercle est de 57180 toises, ou de 25 lieuës chacune de 2287 toises ; que par conséquent, la circonférence de la Terre est de

(c) N. 154. & 155.

9000 lieuës ; & que son diamétre est de 2865.

PROBLÉME X.

330. *La distance du centre de la Terre à celui d'une planette quelconque, & la hauteur de cette planette sur l'horison, telle qu'on l'a observée, étant données ; trouver la Parallaxe † de hauteur de cette planette.*

* Fig. 152. On donne la distance CS * du centre C de la Terre au centre S du Soleil, de 21885 demi-diamétres de la Terre, avec la hauteur du Soleil sur l'horison sensible AB, de 30 deg. 41 min. 38 sec. telle qu'on l'a observée ; & il faut trouver la parallaxe de hauteur de cet astre ; c'est-à-dire, l'angle CST.

Solution. De la hauteur donnée 30 deg. 41 min. 38 sec. retranchez pour la réfraction 1 min. 40 sec. conformément à la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité ; & vous aurez 30 deg. 39 min. 58 sec. pour la vraie hauteur ATS du Soleil sur l'horison AB. Ajoû-

* Fig. 152. † La *hauteur* d'un astre quelconque S *, telle que l'observation la donne, est après l'avoir dégagée des réfractions, l'angle ATS formé par la commune section AT de l'horison sensible AB & du vertical HSZ de cet astre, & par une ligne droite TS tirée du lieu où l'observateur est placé, au centre S de ce même astre. Mais la *vraie hauteur* du même astre S, est l'angle HCS formé par la commune section HC du même vertical précedent HSZ & de l'horison astronomique HO, & par une ligne droite CS tirée du centre C de Terre au même point précedent S. Or l'angle CST (lequel est la différence de cette hauteur ATS à la vraie hauteur HCS ; puisque (a) le complément STZ de la prémiére surpasse de cet angle le complément SCZ de la derniére) est ce que l'on appelle la *Parallaxe* de hauteur de l'astre S. Il faut remarquer que celle des Etoiles fixes est absolument insensible, à cause de leur grande distance à la Terre,

(a) E. l. 1. p. 32.

rez ensuite à cette hauteur l'angle ATC qui (a) est de 90 deg. puisque la ligne droite CT (a) E. I. 3. est une ligne droite tirée du centre C de la P. 18. Terre au point T auquel l'horison sensible AB la touche ; & vous aurez 120 deg. 39 min. 58 s. pour la valeur de l'angle CTS. Ainsi, vous connoîtrez dans le triangle rectiligne STC, le côté CS qui est donné de 21885 parties égales, le côté CT qui est une de ces parties, avec l'angle CTS de 120 deg. 39 min. 58 sec. & par conséquent, vous trouverez de la maniére suivante (b), l'angle CST qui est la parallaxe (b) N. 125. demandée.

Complément du logarithme du côté CS *donné de 21885 parties* - - - - - - - - - -	5.6598535
Logarithme du côté CT *donné de 1 partie* - -	0.0000000
Logarithme du sinus de l'angle CTS *trouvé de 120 deg. 39 min. 58 sec.* - - - - - - -	9.9345763
Logarithme du sinus de la parallaxe demandée CST	15.5944298

qui donnera 8 sec. 7 tierces *p. p.* pour cette parallaxe.

SCHOLIE I.

331. *Si au lieu de donner la hauteur apparente* ATS * *d'une planette, sur l'horison sensible* AB, *on donnoit sa vraie hauteur* HCS *sur l'horison astronomique* HO, *il faudroit alors chercher la parallaxe de hauteur* CST *de cette planette, de la maniére dont nous allons le faire dans l'exemple suivant.* * Fig. 252.

On donne la distance CS *du centre* C *de la Terre au centre* S *de la Lune, de 57 demi-diamétres de la Terre, avec la vraie hauteur* HCS

de cette planette sur l'horison astronomique HO, *de 50 deg. 12 min. & il faut trouver sa parallaxe de hauteur* CST.

Solution. *Dans le triangle-rectiligne* STC, *on connoît le côté* CS *de 57 parties égales; le côté* CT, *d'une de ces parties; avec l'angle* SCT, *de 39 deg. 48 min. puisqu'il est le complément de la hauteur* HCS *qui est donnée de 50 deg. 12 min. Ainsi, l'on trouvera de la manière*
(a) N. 136. *suivante (a), l'angle* CST *qui est la parallaxe demandée.*

Premiérement,

Valeur du côté CS donné de - - - - - -	57	parties
Valeur du côté CT donné de - - - - - - -	1	partie
Somme de ces deux côtés - - - - - - - -	58	
Différence de ces deux mêmes côtés - - -	56	

Secondement,

Valeur de deux angles droits - - - - -	180 d.	0 m.	0 s.
Valeur trouvée de l'angle SCT - - - - -	39	48	0
Somme des angles CST & CTS - - - -	140	12	0
Moitié de cette somme - - - - - - -	70	6	0

Troisiémement,

Complément du logarithme de la somme des côtés CS & CT, trouvée de 58 parties - - - - - -	8.2365720
Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 56 parties - - - - - - - - -	1.7481880
Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles CST & CTS trouvée de 70 d. 6 m.	10.4412975
Logarithme de la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles - - - - - - - -	20.4260575

(b) N. 203. *qui (b) donnera 69 deg. 26 min. 52 sec. pour la valeur de cette demi-différence; laquelle étant retranchée de la demi-somme trouvée de 70 deg. 6 min. laissera 39 min. 8 sec. pour la parallaxe demandée.*

SCHOLIE II.

332. *Comme cette manière de trouver la parallaxe d'une planette, suppose que la distance du centre de cette planette au centre de la Terre est connue, nous en proposerons une autre au N. 416, par le moyen de laquelle on trouvera non-seulement cette parallaxe sans connoître cette distance, mais aussi cette distance après avoir trouvé cette parallaxe.*

PROBLESME XI.

333. *Observer la déclinaison † d'un Astre quelconque.*

Solution. Observez (*a*) la vraie hauteur méridienne de l'astre proposé. Comparez ensuite cette hauteur à celle de l'Equateur, afin de retrancher la plus petite de la plus grande; & le reste sera la déclinaison demandée. (*a*) N. 327. & 330.

PROBLESME XII.

334. *Observer l'obliquité de l'Ecliptique ¶.*

Solution. Observez (*b*) la vraie hauteur méridienne du centre du Soleil au solstice d'Eté, & la vraie hauteur méridienne du même centre au solstice d'hyver. Retranchez ensuite la plus petite hauteur de la plus grande; & le reste sera la vraie distance des Tropiques, dont la (*b*) N. 327. & 330.

† On appelle *Déclinaison* d'un astre, la distance du centre de cet astre à l'Equateur. On la divise en *septentrionale* & en *méridionale*. Elle se mesure sur la circonférence du *cercle de déclinaison* de cet astre; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Equateur, & passe par le centre de ce même astre.

¶ On appelle *Obliquité de l'Ecliptique*, ou *plus grande déclinaison du Soleil*, l'angle que l'Ecliptique forme avec l'Equateur.

moitié donnera la plus grande déclinaison du Soleil ; ou ce qui est la même chose, l'obliquité de l'Ecliptique.

C'est de cette maniére qu'ayant trouvé à l'Observatoire de Paris la vraie hauteur méridienne du centre du Soleil au solstice d'Eté, de 64 deg. 38 min. 20 sec. & la vraie hauteur méridienne du même centre au solstice d'hyver, de 17 deg. 41 min. 20 s. on en a conclu que la vraie distance des Tropiques est de 46 deg. 57 min. & que par conséquent, la plus grande déclinaison du Soleil, ou l'obliquité de l'Ecliptique, est de 23 d. 28 min. 30 sec.

Hauteur observée du bord inférieur du Soleil le jour du solstice d'Eté à midi - - -	64 d.	22 m.	55 s.
Parallaxe † - - - - - - - - - - - - -	0	0	5
Somme - - - - -	64	23	0
Réfraction - - - - - - -	0	0	28
Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil -	64	22	32
Diamétre apparent du Soleil - - - - -	0	15	48
Vraie hauteur du centre du Soleil - -	64	38	20

Hauteur observée du bord inférieur du Soleil le jour du solstice d'hyver à midi - -	17 d.	27 m.	57 s.
Parallaxe - - - - - - -	0	0	9
Somme - - - - - - -	17	28	6
Réfraction - - - - - - -	0	3	6
Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil -	17	25	0

† *Voyez la Table des Parallaxes du Soleil, qui est à la fin de ce Traité.*

Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil	17 d.	25 m.	0 ſ.
Diamétre apparent du Soleil	0	16	20
Vraie hauteur du centre du Soleil	17	41	20
Vraies hauteurs du centre du Soleil	64 d.	38 m.	20 ſ.
	17	41	20
Vraie diſtance des Tropiques	46	57	0
dont la moitié	23	28	30

eſt la plus grande déclinaiſon du ſoleil, c'eſt-à-dire l'obliquité de l'Ecliptique.

CHAPITRE IV.

Des Uſages de la Trigonométrie-Sphérique.

NOUS ſuppoſons qu'en liſant ces Uſages on aura une Sphére ſous les yeux ; & qu'on la diſpoſera de maniére qu'elle repréſentera au naturel les figures dont nous ne pouvons donner ici que la projection.

PREMIER USAGE.

335. *Connoiſſant l'obliquité de l'Ecliptique, trouver la déclinaiſon de tel point de ce cercle que l'on veut.*

On donne l'obliquité AϒB * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 ſec. & il faut trouver la déclinaiſon AB de ſon point B, qui eſt le 10me deg. 0 min. 34 ſec. des ♊. * Fig. 151.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ϒBA qui eſt rectangle en A, on connoît l'hypoténuſe ϒB, qui eſt donnée de 70 d. 0 m. 34 ſ. avec l'angle AϒB qui eſt auſſi donné de 23 d.

28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la
(a) N. 263. manière suivante (*a*), le côté AB qui est la déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle A♈B *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♈B *donnée de 70 deg. 0 min. 34 sec.* - - - - - - -	9.9730118
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée AB.	19.5732753

(b) N. 103. qui (*b*) donne 21 deg. 59 min. 3 sec. pour cette déclinaison.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 153. 336. *On donne l'obliquité* C♎D * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison* CD *de son point* D, *qui est le 14e deg. 56 min. 54 sec. du* ♌.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♎DC qui est rectangle en C, on connoît l'hypoténuse D♎, laquelle est le complément 45 d. 3 min. 6 sec. de l'arc ♋D qui est donné de 44 deg. 56 min. 54 sec. avec l'angle C♎D qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière
(c) N. 263. suivante (*c*), le côté CD qui est la déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle C♎D *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse D♎ *trouvée de 45 deg. 3 min. 6 sec.* - - - - - - -	9.8498763
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée CD	19.4501398

(d) N. 103. qui (*d*) donne 16 deg. 22 min. 31 sec. pour cette déclinaison.

AUTRE

AUTRE EXEMPLE.

337. *On donne l'obliquité* F♎G * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison* FG *de son point* G, *qui est le* 13[me] *deg. 13 min. 42 sec. du* ♏. * Fig. 153.

Solution. Dans le triangle-Sphérique GF♎ qui est rectangle en F, on connoît l'hypoténuse ♎G, qui est donnée de 43 deg 13 min 42 sec. avec l'angle F♎G, qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le côté FG qui est la déclinaison demandée. (a) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle F♎G *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec* - - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♎G *donnée de 43 deg. 13 min. 42 sec.* - - - - - - -	9.8356318
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée FG	19.4358953

qui (*b*) donne 15 deg. 49 min. 58 sec. pour cette déclinaison. (b) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

338. *Enfin, on donne l'obliquité* K♈I * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison* KI *de son point* I, *qui est le* 18[me] *deg. 57 min 20 sec. du* ♒. * Fig. 153.

Solution. Dans le triangle-Sphérique IK♈ qui est rectangle en K, on connoît l'hypoténuse I♈, puisqu'elle est le complément 41 deg. 2 min. 40 sec. de l'arc ♑I qui est donné de 48 deg. 57 min. 20 sec. avec l'angle K♈I qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.

Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante
(a) N. 263. (a), le côté KI qui est la déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle KϒI *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse Iϒ *trouvée de 41 deg. 2 min. 40 sec.* - - - - - - -	9.8173301
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée KI	19.4175936

(b) N. 103. qui (b) donne 15 deg. 9 min. 48 sec. pour cette déclinaison.

SCHOLIE I.

339. *Nous avons pris des points dans différents quarts de l'Ecliptique; afin de faire voir la maniére dont il faudra résoudre les questions suivantes, lorsqu'il s'agira d'un point situé dans une partie de ce cercle différente de celle qui sera donnée dans l'exemple que nous proposerons. Ainsi, nous ne donnerons souvent qu'un seul exemple sur chacune de ces questions.*

SCHOLIE II.

340. *C'est en cherchant de cette maniére la déclinaison de chaque degré de l'Ecliptique, que l'on construit une Table de ces différentes déclinaisons, qui est utile pour trouver la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu auquel on connoît la hauteur méridienne du Soleil; & réciproquement la hauteur méridienne du Soleil sur l'horison d'un lieu auquel on connoît la hauteur du Pôle: parce que la différence de la déclinaison du Soleil à sa hauteur méridienne, lorsque cet astre est dans*

les signes septentrionaux ; ou la somme de la déclinaison du Soleil & de sa hauteur méridienne, lorsque ce même astre est dans les signes méridionaux, est toujours le complément de la hauteur du Pôle.

II. USAGE.

341. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la déclinaison d'un point quelconque de ce cercle, trouver ce point.*

On donne l'obliquité A♈B *, ou A♎B de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec la déclinaison AB, de l'un de ses points B, de 17 deg. 27 min. 35 sec. & il faut trouver ce point. * Fig. 154.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♈BA, ou ♎BA, qui est rectangle en A, on connoît l'angle A♈B ou A♎B, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30. sec. avec le côté AB, qui est aussi donné de 17 deg. 27 min. 35 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), l'hypoténuse ♈B, ou ♎B. (*a*) N. 264.

Complément du logarithme du sinus de l'angle A♈B *ou* A♎B *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30. *sec.* -	0.3997365
Logar. du sinus du côté AB *donné de* 17 *deg.* 27 *min.* 35 *sec.* - - - - - - - - - - -	9.4771722
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♈B, *ou* ♎B	9.8769087

qui (*b*) donne 48 deg. 52 min. 5 sec. pour la valeur de cette hypoténuse ; & par conséquent, le point demandé sera le 18me deg. 52 min. 5 sec. du ♉, ou du ♏, lorsqu'il devra être dans le premier quart de l'Ecliptique, ou dans le troisiéme ; & le 11me deg. 7 min. 55 sec. du ♌, ou du ♒, lorsqu'il devra être dans le second quart de ce même cercle, ou dans le dernier. (*b*) N. 103.

III. USAGE.

342. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, trouver l'Ascension droite † de tel point de ce cercle que l'on veut.*

* Fig. 155. On donne l'obliquité A♈B * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'ascension droite ♈A de son point B, qui est le 9me deg. 3 min. 8 sec. des ♓.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♈BA qui est rectangle en A, on connoît l'angle A♈B qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse ♈B qui est aussi donnée de 69 deg. 3 min. 8 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére

(a) N. 284. suivante (a), le côté ♈A qui est l'ascension demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A♈B *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.*	0.0375199
Logar. de la tang. du compl. de l'hypoténuse ♈B *donnée de 69 deg. 3 min. 8 sec.* - - - -	9.5829930
Logarithme de la tangente du complément de l'ascention demandée ♈A. - - - - -	9.6205129

(b) N. 103. qui (b) donne 22 deg. 39 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 67 deg. 20 min. 46 sec. pour celle de l'ascension demandée.

† On appelle *Ascension droite* d'un astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphére droite, monte sur l'horison en même temps que le centre de cet astre; ou ce qui est la même chose, l'arc de l'Equateur qui est compris entre le commencement du ♈ & le cercle de déclinaison de l'astre dont il s'agit. Mais, on appelle au contraire *Ascension oblique* d'un astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphére oblique monte sur l'horison en même temps que le centre de cet astre; ou ce qui est la même chose, l'arc de l'Equateur qui est compris entre le commencement du ♈ & l'horison oriental, à l'instant auquel le centre de l'astre dont il s'agit est à cet horison.

AUTRE EXEMPLE.

343. *On donne l'obliquité C♎D * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'ascension droite ♈QC de son point D, qui est le 15me deg. 51 min. 11 sec. de la ♍.* * Fig. 155.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♎DC qui est rectangle en C, on connoît l'angle C♎D qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse D♎, laquelle est le complément 14 deg. 8 min. 49 sec. de l'arc ♋D qui est aussi donné de 75 deg. 51 m. 11 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le côté C♎. (*a*) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle C♎D donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - - - - - - - - - -	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse D♎ donnée de 14 deg. 8 min. 49 sec.	10.5985067
Logarithme de la tangente du complément du côté C♎ - - - - - - -	10.6360266

qui (*b*) donne 76 deg. 58 min. 57 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 13 d. 1 m. 3 s. pour celle de ce côté; laquelle étant retranchée de l'arc ♈♋♎ qui est de 180 d. laissera 166 deg. 58 min. 57 sec. pour l'ascension demandée ♈QC. (*b*) N. 103.

SCHOLIE.

344. *Après avoir trouvé de cette maniére l'ascension droite de chaque degré de l'Ecliptique, on en construit une Table qui est d'un grand usage dans l'Astronomie.*

IV. USAGE.

345. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique,*

trouver l'angle † que ce cercle forme avec le Méridien, à l'instant auquel un point-donné de ce même cercle passe par ce Méridien.

*Fig. 156. On donne l'obliquité E♈A * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'angle ♎AP que ce cercle forme avec le Méridien EAP, à l'instant auquel le point A de ce même cercle, qui est le 10me deg. 14 min. 35 sec. des ♓, passe par ce Méridien.

Solution. Dans le triangle-Sphérique EA♈ qui est rectangle en E, on connoît l'angle E♈A qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse ♈A qui est aussi donnée de 70 d. 14 min. 35 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma-
(a) N. 283. niére suivante (*a*), l'angle ♈AE qui (*b*) est égal
(b) N. 199. à l'angle demandé ♎AP.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ♈A donnée de 70 deg. 14 min. 35 sec. - - - - - - - - - - - - - - -	0.4710438
Logarithme de la tangente du complément de l'angle E♈A donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	10.3622166
Logar. de la tangente de l'angle ♈AE - - -	10.8332604

(c) N. 103. qui (*c*) donne 81 deg. 38 min. 54 sec. pour la valeur de cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'angle demandé ♎AP.

SCHOLIE.

346. *C'est en cherchant de cette maniére chacun de ces angles, que l'on en construit une Table*

† L'angle dont il s'agit, est toujours celui qui est formé par la partie de l'Ecliptique qui se trouve dans l'hémisphére oriental, & par la partie du Méridien qui est comprise entre l'Ecliptique & le Pôle septentrional.

qui a aussi son usage dans l'Astronomie. Mais il faut remarquer qu'il suffit de les trouver pour chaque degré du premier quart de l'Ecliptique; parce que ceux du second quart sont les supplémens de ceux du premier, & que ceux du troisiéme quart & du quatriéme, sont les mêmes que ceux du premier & du second, pris dans un ordre rétrogradé.

V. USAGE.

347. *Connoissant la hauteur du Pôle, avec la déclinaison d'un point quelconque de l'Ecliptique, trouver la difference ascensionnelle † de ce point.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min 10 sec. avec la déclinaison AC du point C de l'Ecliptique, de 12 deg. 20 min. & il faut trouver la différence ascensionnelle AB de ce point. * Fig. 157. & 158.

Solution. Dans le triangle-Sphérique BCA qui est rectangle en A, on connoît le côté AC qui est donné de 12 deg. 20 min. avec l'angle ABC qui est de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisqu'il a pour mesure (a) la hauteur HE de l'Equateur EQ sur l'horison HO; c'est-à-dire, le complément de la hauteur du Pôle P sur le même horison, laquelle est aussi donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. Ainsi, l'on cherche (a) N. 196.

† On appelle *Différence ascensionnelle* d'un astre quelconque, l'arc de l'Equateur qui est compris entre l'ascention droite & l'ascention oblique de cet astre.

(a) N. 277. de la maniére suivante (a), la différence demandée AB.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle ABC *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* -	0.0583290
Logarithme de la tangente du côté AC *donné de* 12 *deg.* 20 *min.* - - - - - - - -	9.3397391
Logarithme du sinus de la différence ascensionnelle demandée AB - - - - - - - - - - - - -	9.3980681

(b) N. 103. qui (b) donne 14 deg. 2 min. 25 sec. *p. m.* pour la valeur de cette différence.

SCHOLIE I.

348. *Si au lieu de donner la déclinaison du point de l'Ecliptique dont on demande la différence ascensionnelle, on donne seulement ce point; il faut alors commencer par chercher sa déclinai-*
(c) N. 335. *son* (c), *& l'on trouvera ensuite sa différence ascensionnelle, de la même maniére dont nous venons de le faire dans cet usage.*

SCHOLIE II.

* Fig. 157. 349. *Si l'on ajoûte au quart* EB * *de la circonférence de l'Equateur, la différence ascensionnelle* AB *d'un point* C *de l'Ecliptique, qui décline vers le Pôle supérieur; ou si l'on retran-*
* Fig. 158. *che au contraire du quart* EB * *de la circonférence de l'Equateur, la différence ascensionnelle* AB *d'un point* C *de l'Ecliptique, qui décline vers le Pôle inférieur, la somme* EBA (*Fig.* 157.) *ou le reste* EA (*Fig.* 158.) *est un moyen arithmétique assez exact entre la partie orientale & la partie occidentale du vrai arc diurne du jour*

auquel

auquel ce point se trouve au Méridien en même temps que le Soleil. Ainsi, l'on peut prendre cette somme, ou cette différence, pour le vrai arc semidiurne de ce jour ; & par conséquent, si l'on réduit cet arc en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, on a avec assez de précision, la vraie durée de la moitié de ce même jour. Mais, on ne peut en conclure qu'à quelque chose près, l'heure du lever du Soleil, & celle de son coucher ; parce que les parties orientales des arcs diurnes ne sont point parfaitement égales aux parties occidentales des mêmes arcs.

Supposons pour exemple, que l'on veut sçavoir le temps que le Soleil a demeuré sur l'horison de Paris le 14. du mois de Mai de l'année 1749. On cherche dans quelques Ephémerides, ou par les Tables de M. De Cassini, quel étoit le lieu du Soleil au midi du jour proposé ; & l'on trouve que ce lieu étoit le 23me deg. 41 min. 39 sec. du ♉ On cherche ensuite (a) la déclinaison 18 d. (a) N. 335.
43 m. 28 s. de ce point & la différence ascen- & 347.
sionnelle 22 deg. 48 min. 37 sec. qui convient à cette déclinaison. Enfin, comme le point dont il s'agit est situé dans l'hémisphére septentrional, on ajoûte cette différence à 90 deg. & l'on a 112 deg. 48 min. 37 sec. pour l'arc semidiurne de Paris, le 14. du mois de Mai de l'année 1749. Or, cet arc étant réduit en temps par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, donne 7 heures 31 min. 14 sec pour la vraie durée de la moitié de ce jour ; & par conséquent, 15 h.

2 min. 28 sec. pour celle de ce jour entier : 4 h. 28 min. 46 sec. à peu de chose près, pour l'instant du lever du Soleil : & 7 h. 31 m. 14 s. aussi à quelque chose près, pour celui de son coucher.

(a) N. 335. **Premiérement, (a)**

Logarithme du sinus de l'obliquité de l'Ecliptique, connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - -	9.6002635
Logarithme du sinus du point de l'Ecliptique, proposé de 53 deg. 41 min. 39 sec. - - -	9.9062639
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée -	19.5065274.

(b) N. 103. *qui (b) donne 18 deg. 43 min. 28 sec.* p. m. *pour cette déclinaison.*

(c) N. 347. **Secondement, (c)**

Complément du logarithme de la tangente de la hauteur de l'Equateur, donnée de 41 deg. 9 m. 50 sec. - - - - - - - - - - - - -	0.0583290
Logarithme de la tangente de la déclinaison du point proposé, trouvée de 18 deg. 43 m. 28 s.	9.5301444
Logarithme du sinus de la différence ascensionnelle demandée - - - - - - - - - - - - -	9.5884734

(d) N. 103. *qui (d) donne 22 deg. 48 min. 37 sec.* p. m. *pour cette différence.*

Troisiémement,

	90 d.	0 m.	0 s.		6 h.	0 m.	0 s.
	22	0	0		1	28	0
		48	0			3	12
			37				2
Arc semid.	112	48	37	H. du coucher.	7	31	14

	12 h.	0 m.	0 s.		7 h.	31 m.	14 s.
	7	31	14		7	31	14
Heur. du lever.	4	28	46	Durée du jour.	15	2	28

350. *Mais si l'on veut déterminer rigoureusement par le moyen des différences ascension-*

relles, les temps vrais du lever & du coucher du Soleil, il faut alors chercher ces temps de la maniére dont nous allons le faire dans la Question suivante, que nous proposons pour exemple.

On demande quels ont été les temps vrais du lever & du coucher du Soleil à Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749.

Pour résoudre cette Question, 1[ent] *on cherche par le moyen de quelques Ephémerides, ou par les Tables de* M. De Cassini, *quel étoit le lieu du Soleil le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du matin : quel étoit aussi le lieu du même Astre, le même jour à 6 heures du soir ; & l'on trouve le 26*[me] *deg. 57 min. 46 sec. de la* ♎, *pour le premier ; & le 27*[me] *deg. 27 min. 41 sec. du même signe, pour le dernier.*

2[ent] *On cherche (a) la déclinaison du 26*[me] *deg. 57 min. 46 sec. de la* ♎ *; celle de son 27*[me] *deg. 27 min. 41 sec. & l'on trouve que la premiére est de 10 deg. 24 min. 20 sec. & la derniére, de 10 deg. 35 min. 7 sec.* (a) N. 335.

3[ent] *On cherche (b) la différence ascensionnelle qui convient à la premiére de ces deux déclinaisons ; la différence descensionnelle † qui* (b) N. 347.

† On appelle *Descension droite* d'un Astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphére droite descend sous l'horison en même temps que le centre de cet astre. On appelle au contraire *Descension oblique* d'un Astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphére oblique descend sous l'horison en même temps que le centre de cet astre. Enfin, on appelle *Différence descensionnelle* d'un Astre, l'arc de l'Equateur qui est compris entre la descension droite & la descension oblique de ce même astre.

convient à la derniére; & l'on trouve 12 *deg.* 7 *min.* 27 *ſec. pour cette différence aſcenſionnelle;* & 12 *deg.* 21 *min.* 3 *ſec. pour cette différence deſcenſionnelle.*

4^{ent}, *Comme les points dont il s'agit ſont chacun dans l'hémiſphere méridional, on retranche de* 90 *deg. chacune de ces différences; & il reſte* 77 *deg.* 52 *min.* 33 *ſec. pour la valeur de la partie orientale de l'arc diurne du jour propoſé; &* 77 *deg.* 39 *min.* 30 *ſec. pour la valeur de la partie occidentale du même arc.*

5^{ent} *Enfin, après avoir réduit en temps chacune de ces valeurs, par le moyen de la Table qui eſt à la fin de ce Traité, la différence* 6 *heures* 48 *m.* 30 *ſec. du premier à* 12 *heures, eſt le temps vrai auquel le Soleil s'eſt levé ſur l'horiſon de Paris le* 20. *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *& le dernier,* 5 *heures* 10 *min.* 38 *ſec. eſt le temps vrai auquel le Soleil s'eſt couché ce même jour, ſous le même horiſon.*

(a) N. 335. Premiérement, (*a*)

Logarithme du ſinus de l'obliquité de l'Ecliptique, connue de 23 deg. 28 min. 30 ſec. - - -	9.6002635
Logar. du ſinus du 26e deg. 57 min. 46 ſec. de la ♎	9.6564925
Log. du ſinus de la premiére déclinaiſon demandée	19.2567560

(b) N. 103. *qui* (*b*) *donne* 10 *d.* 24 *min.* 20 *ſec. pour cette premiére déclinaiſon.*

Logarithme du ſinus de l'obliquité de l'Ecliptique, connue de 23 deg. 28 min. 30 ſec. - - -	9.6002635
Logar. du ſinus du 27me deg. 27 m. 41 ſ. de la ♎	9.6638429
Logar. du ſin. de la derniére déclinaiſon demandée	19.2641064

(c) N. 103. *qui* (*c*) *donne* 10 *deg.* 35 *min.* 7 *ſ. pour cette autre déclinaiſon.*

Secondement, (a)

(a) N. 247.

Complément du logarithme de la tangente de la hauteur de l'Equateur, donnée de 41 d. 9 m. 50 s.	0.0583290
Logarithme de la tangente de la premiére déclinaison trouvée de 10 deg 24 min. 20 sec. -	9.2639543
Log. du sinus de la diff. ascensionnelle demandée.	9.3222833

qui (b) *donne* 12 *deg.* 7 *min.* 27 *sec. pour cette différence.* (b) N. 103.

Complément du logarithme de la tangente de la hauteur de l'Equateur, donnée de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - - - - - - - - - -	0.0583290
Logarithme de la tangente de la derniére déclinaison trouvée de 10 deg. 35 min. 7 sec.	9.2715603
Log. du sinus de la diff. descensionnelle demandée.	9.3298893

qui (c) *donne* 12 *deg.* 20 *min.* 30 *sec. pour cette autre différence.* (c) N. 103.

Troisiémement,

90 d.	0 m.	0 s.	
12	7	27	
77	52	33	Partie orient. de l'arc diurne.

70 d.	0 m.	0 s.	4 h.	40 m.	0 s.
7	0	0		28	0
	52	0		3	28
		33			2
77	52	33	5	11	30

12 h.	0 m.	0 s.	
5	11	30	
6	48	30	Temps vrai du lever.

90 d.	0 m.	0 s.	
12	20	30	
77	39	30	Partie occid. de l'arc diurne.

70 d.	0 m.	0 s.	4 h.	40 m.	0 s.	
7	0	0		28	0	
	39	0		2	36	
		30			2	
77	39	30	5	10	38	Temps vrai du coucher.

Or, on peut toujours de cette maniére déterminer avec toute la précision possible les temps vrais : mais il n'en est pas de même des temps apparents ; & il faut les chercher par des voies toutes différentes de celles que nous venons de suivre. C'est pourquoi nous proposerons encore cette même question dans le huitiéme Usage, aux Nos 358. & 365. afin de l'y résoudre d'une maniére dont on puisse également se servir pour trouver les temps vrais, comme pour connoître les temps apparents.

SCHOLIE III.

351. *Enfin, ce que nous venons de dire des différences ascensionnelles des points de l'Ecliptique, soit pour trouver ces différences, soit pour connoître par leur moyen le temps vrai que chacun de ces points demeure sur l'horison d'un certain lieu, convient pareillement aux différences ascensionnelles de tous les astres ; & l'on en construit ordinairement des Tables pour chaque différent degré de hauteur du Pôle.*

VI. USAGE.

352. *Connoissant la hauteur du Pôle, l'obliquité de l'Ecliptique, & un point quelconque de ce cercle, trouver l'Ascension oblique de ce point.*

* Fig. 157. & 158. On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'obliquité A♈C de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'ascension

oblique ♈B (*Fig.* 157.) ou ♈QEB (*Fig.* 158.) du point C de ce cercle.

Solution. Cherchez (*a*) la déclinaison AC du point proposé C, son ascension droite ♈A (*Fig.* 157.), ou ♈QEA, (*Fig.* 158.), & sa différence ascensionnelle AB. Ensuite, si le point proposé décline vers le Pôle supérieur (*Fig.* 157.), retranchez sa différence ascensionnelle AB de son ascension droite ♈A : mais, s'il décline vers le Pôle inférieur (*Fig.* 158.), ajoûtez au contraire sa différence ascensionnelle AB à son ascension droite ♈QEA ; & le reste ♈B (*Fig.* 157.), ou la somme ♈QEB (*Fig.* 158.), sera l'ascension oblique demandée. (a) N. 335. 342. & 347

VII. USAGE.

353. *Connoissant la hauteur du Pôle, avec la déclinaison du Soleil, trouver l'Amplitude † orientale de cet Astre, & l'Azimuth de son lever ¶.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec la déclinaison AC du Soleil, de 12 deg. 19 min. 44 sec. & il faut trouver l'amplitude orientale BC de cet astre, avec l'azimuth HC de son lever. * Fig. 157. & 158.

† On appelle *Amplitude* d'un Astre, l'arc de l'horison qui est compris entre le point du vrai orient, ou celui du vrai occident, & le point auquel cet astre se leve, ou celui auquel il se couche. On divise les Amplitudes en *orientales*, & en *occidentales* ; & on les subdivise en *septentrionales* & en *méridionales*.

¶ Lorsqu'un astre est à l'horison, son azimuth est le complément de son amplitude. Voyez la seconde Note du N° 319.

Solution. Dans le triangle-Sphérique BCA qui est rectangle en A, on connoît l'angle ABC
(a) N. 196. de 41 deg. 9 min 50 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur EQ; c'est-à-dire, le complément de la hauteur du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 s. On connoît aussi le côté AC qui est donné de 12 deg. 19 min. 44 sec. Ainsi, l'on cher-
(b) N. 264. che de la maniére suivante (*b*), l'hypoténuse BC qui est l'amplitude demandée.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ABC *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus du côté AC *donné de* 12 *deg.* 19 *min.* 44 *sec.* - - - - -	9.3294446
Logarithme du sinus de l'amplitude demandée BC	9.5110768

(c) N. 103. qui (*c*) donne 18 deg. 55 min 45 sec. *p. m.* pour la valeur de cette amplitude ; laquelle étant ajoûtée à 90 deg. lorsque le Soleil est dans les signes septentrionaux (*Fig.* 157), ou retranchée de 90 deg. lorsqu'il est dans les signes méridionaux (*Fig.* 158), donnera dans le premier cas, 108 deg. 55 min. 45 sec. & dans le dernier, 71 deg. 4 min. 15 sec. pour la valeur de l'azimuth demandé HC.

SCHOLIE I.

354. *C'est en cherchant de cette maniére les amplitudes tant orientales qu'occidentales d'un astre, que l'on connoît les vrais points de l'horison par lesquels le centre de cet astre doit passer pour monter sur ce cercle, ou pour descendre au dessous. Mais ces points ausquels on trouve par le calcul précedent qu'un astre doit paroître à l'instant de son lever, ou à celui de son coucher, ne sont point ceux ausquels on apperçoit cet astre à*

à ces instants ; parce que la réfraction faisant toujours paroître dans le ciel un objet plus élevé qu'il ne l'est en effet, la distance d'un astre au Pôle qui dans la Sphére oblique est élevé sur l'horison, est toujours plus petite au moment auquel on apperçoit cet astre à l'horison, qu'à celui auquel il y est effectivement. Par consequent, les amplitudes apparentes sont plus grandes que les vraies amplitudes, dans l'hémisphere qui est du côté du Pôle élevé ; & plus petites au contraire, dans l'autre hémisphere. Or, pour faire voir comment on doit s'y prendre pour trouver ces amplitudes apparentes, nous allons résoudre la même Question précédente, en ayant égard aux effets que la réfraction produit.

355. Soit donc 1^{ent} le Soleil S * situé dans l'hémisphere septentrional, à 32 min. 20 sec. de profondeur sous l'horison HO, qui est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soient en même temps, le cercle SCG le parallele que le Soleil décrit ; l'arc PSD, une partie du cercle de déclinaison de cet astre ; & l'arc ZFS, une partie de son cercle vertical. Cela posé : * Fig. 159.

On a un triangle-Sphérique obliquangle SZP, dans lequel on connoît le côté ZFS de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF & de la profondeur FS du Soleil, qui est donnée de 32 min. 20 sec. le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P,

qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & *le côté* PS *de 77 deg. 40 min. 16 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison* DS *qui est aussi donnée de 12 deg. 19 min. 44 sec.*
(a) N. 293. *Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), l'angle* SZP *de ce triangle.*

Premiérement,

Valeur donnée du côté ZFS - - -	90 d.	32 m.	20 s.
Valeur trouvée du côté ZP - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté PS - -	77	40	16
Somme de ces trois côtés - -	209	22	26
Moitié de cette somme - - -	104	41	13
Différence du côté ZFS à cette moitié -	14	8	53
Différence du côté ZP à cette même moitié	63	31	23

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté ZFS donné de 90 deg. 32 min. 20 sec. - -	0.0000192
Complément du logarithme du sinus du côté ZP trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté ZFS, trouvée de 14 deg. 8 min. 53 sec. - -	9.3081516
Logarithme du sinus de la différence du côté ZP, trouvée de 63 deg. 31 min. 23 sec. - -	9.9518782
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SZP, ou FZO - -	19.5216812
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - - -	9.7608406

(b) N. 103. *qui (b) donne 35 deg. 12 min. 31 sec.* p. m. *pour la valeur de cette moitié ; & par conséquent, 70 deg. 25 min. 2 sec. pour*
(c) N. 196. *celle de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure le complément* FO *de l'amplitude demandée* BF. *Donc, cette amplitude est de 19 deg. 34 min. 58 sec. & surpasse par conséquent de 39 min. 13 sec.*
(d) N. 353. *la vraie amplitude* BC *que l'on a trouvée par l'Usage précedent (d).*

356. *Soit en second lieu le Soleil* S * *situé* * Fig. 160.
dans l'hémisphere méridional, à 32 *deg.* 20 *m. de profondeur sous l'horison* HO, *qui, comme nous l'avons déja dit, est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soient aussi le cercle* SCG *le parallele que le Soleil décrit; l'arc* PDS, *une partie du cercle de déclinaison de cet astre; & l'arc* ZFS, *une partie de son cercle vertical. Cela posé :*

On a un triangle-Sphérique obliquangle SZP, *dans lequel on connoît le côté* ZFS *de* 90 *deg.* 32 *min.* 20 *sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle* ZF *& de la profondeur* FS *du Soleil, qui est donnée de* 32 *m.* 20 *sec. le côté* ZP *de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur* OP *du Pôle* P, *qui est donnée de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. & le côté* PDS *de* 102 *deg.* 19 *min.* 44 *sec. puisqu'enfin ce dernier côté est la somme du quart de cercle* PD *& de la déclinaison* DS *qui est aussi donnée de* 12 *deg.* 19 *min.* 44 *sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante* (*a*), *l'angle* (a) N. 293.
SZP *de ce triangle.*

Premiérement,

Valeur donnée du côté ZFS	- -	90 d.	32 m.	20 s.
Valeur trouvée du côté ZP	- -	41	9	50
Valeur trouvée du côté PDS	- -	102	19	44
Somme de ces trois côtés	- -	234	1	54
Moitié de cette somme	- -	117	0	57
Différence du côté ZFS à cette moitié	-	26	28	37
Différence du côté ZP à cette même moitié		75	51	7

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté ZFS donné de 90 deg. 32 min. 20 sec. - -	0.0000192
Complément du logarithme du sinus du côté ZP trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté ZFS, trouvée de 26 deg. 28 min. 37 sec. - -	9.6491767
Logarithme du sinus de la différence du côté ZP, trouvée de 75 deg. 51 min. 7 sec. - -	9.9866228
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SZP, ou FZO - -	19.8174509
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - - - -	9.9087254

(a) N. 103. *qui (a) donne 54 deg. 8 min. 23 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 108 deg. 16 min. 46 sec. pour celle de cet angle.*
(b) N. 196. *Or (b), cet angle a pour mesure l'arc* OBF, *qui est la somme de l'amplitude demandée* BF *& du quart du cercle* OB. *Donc, cette amplitude est de 18 deg. 16 min. 46 sec. & differe par conséquent de 38 min. 59 sec. de la vraie amplitude* BC *que l'on a*
(c) N. 351. *trouvée par l'Usage précedent (c).*

SCHOLIE II.

357. *Après avoir trouvé de cette maniere les amplitudes qui conviennent à chaque degré de déclinaison, suivant les différentes hauteurs du Pôle, on en construit des Tables qui sont d'un grand usage dans l'Astronomie; & particuliérement dans la Navigation, où elles tiennent lieu d'une ligne méridienne qu'il n'est pas possible d'avoir sur la Mer.*

VIII. USAGE.

358. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, trouver l'heure à laquelle*

le Soleil se leve un certain jour sur cet horison; & celle à laquelle il se couche le même jour sous le même horison.

On demande quels ont été les temps vrais du lever & du coucher du Soleil S * à Paris, le 20 du mois d'Octobre de l'année 1749. * Fig. 161.

Solution. Après avoir connu par quelques Ephémerides, ou par les Tables de M. *De Cassini*, que le 20 du mois d'Octobre de l'année 1749. le Soleil à 6 heures du matin étoit au 26me deg. 57 min. 46 sec. de la ♎; & que le même jour à 6 heures du soir, il étoit au 27me deg. 27 min. 41 sec. du même signe, on cherche (a) la déclinaison qui convient à chacun de ces points; & l'on trouve 1ent que celle qui convient au premier, est de 10 deg. 24 min. 20 sec. 2ent que celle qui convient au dernier, est de 10 deg. 35 min. 7 sec. Cela posé: (a) N. 335.

Premiérement, dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PDS de 100 deg. 24 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle PD & de la déclinaison DS que l'on vient de trouver de 10 deg. 24 min. 20 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min 10 sec. & le côté ZS de 90 deg. puisque ce côté est le vertical du Soleil situé à l'horison HO. Ainsi, l'on cherche

(a) N. 293. de la maniére ſuivante (a), l'angle SPZ de ce triangle †.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté PDS - - -	100 *d.*	24 *m.*	20 *ſ.*
Valeur trouvée du côté PZ - - -	41	9	50
Valeur donnée du côté ZS - - - -	90	0	0
Somme de ces trois côtés - - - - -	231	34	10
Moitié de cette ſomme - - - - -	115	47	5
Différence du côté PDS *à cette moitié* -	15	22	45
Différence du côté PZ *à cette même moitié* -	74	37	15

Secondement,

Complément du logarithme du ſinus du côté PDS *trouvé de* 100 *deg.* 24 *min.* 20 *ſec.* - - - -	0.0071019
Complément du logarithme du ſinus du côté PZ *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *ſec.* - - - -	0.1816322
Logarithme du ſinus de la différence du côté PDS, *trouvée de* 15 *deg.* 22 *min.* 45 *ſec.* - - -	9.4235825
Logarithme du ſinus de la différence du côté PZ, *trouvée de* 74 *deg.* 37 *min.* 15 *ſec.* - - -	9.9841634
Logarithme du quarré du ſinus de la moitié de l'angle horaire demandé SPZ, *ou* DPE - - - -	19.5965800
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du ſinus de la moitié de cet angle - - - - - -	9.7982900

(b) N. 103. qui (b) donne 38 deg. 56 min. 16 ſec. ½ pour la valeur de cette moitié ; & par conſéquent, 77 deg. 52 min. 33 ſec. pour celle (c) N. 196. de cet angle. Or (c), cet angle a pour meſure l'arc DE, qui étoit la partie orientale de l'arc diurne du jour propoſé. Donc, cette partie étoit de 77 deg. 52 min. 33 ſec. de même que nous l'avons trouvée au N° 350 ; & donne par conſéquent de même, 6 heures 48 min. 30 ſec. pour l'heure du lever du Soleil à Paris, le jour propoſé.

† L'angle SPZ, ou DPE, s'appelle l'*Angle horaire* ; parce qu'il (d) N. 196. a pour meſure (d) l'arc DE de l'Equateur, qui eſt la diſtance du Soleil au Méridien HZO.

Secondement, dans le triangle-Sphérique obliquangle *s*PZ, on connoît le côté P*ds* de 100 deg. 35 min. 7 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle P*d* & de la déclinaison *ds*, que l'on a trouvée de 10 deg. 35 min. 7 sec. le côté PZ que l'on a déja trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. & le côté Z*s* de 90 deg. par la même raison que dans le triangle précedent. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), l'angle *s*PZ de ce triangle. (*a*) N. 293.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté Pds - - -	100 *d.*	35 *m.*	7 *s.*
Valeur trouvée du côté PZ - - -	41	9	50
Valeur donnée du côté Zs - - - -	90	0	0
Somme de ces trois côtés - - - - - -	231	44	57
Moitié de cette somme - - - - - -	115	52	28½
Différence du côté Pds *à cette moitié* -	15	17	21½
Différence du côté PZ *à cette même moitié*	74	42	38½

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté Pds *trouvé de* 100 *deg.* 35 *min.* 7 *sec.* - - -	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté Pds, *trouvée de* 15 *deg.* 17 *min.* 21 *sec.*½ - - -	9.4210985
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, *trouvée de* 74 *deg.* 42 *min.* 38 *sec.*½ - - -	9.9843502
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle horaire demandé sPZ, *ou* dPE - - - -	19.5945351
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - - - - - -	9.7972675

qui (*b*) donne 38 deg. 49 min. 45 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 77 deg. 39 min. 30 sec. pour celle de cet angle. Or (*c*), cet angle a pour mesure l'arc E*d*, qui étoit la partie occidentale de l'arc diurne du jour proposé. Donc, (*b*) N. 103. (*c*) N. 196.

cette partie étoit de 77 deg. 39 min. 30 sec. de même que nous l'avons trouvée au N 350; & donne par conséquent de même, 5 heures 10 min. 38 sec. pour l'heure du coucher du Soleil à Paris, le même jour proposé.

SCHOLIE I.

* Fig. 161. 359. *Quoique les triangles* SPZ * *&* sPZ *soient quadrantaux, & suivent par conséquent les mêmes loix que les triangles-Sphériques rectangles, nous les avons cependant considerés comme étant seulement obliquangles, afin de mettre le plus d'uniformité qu'il nous est possible, dans notre maniére de résoudre les triangles-Sphériques.*

SCHOLIE II.

360. *Au lieu de résoudre, comme nous venons* * Fig. 161. *de le faire, le triangle* SPZ *, *pour connoître l'angle* SPZ, *&* *le triangle* sPZ, *pour connoître l'angle* sPZ; *on peut trouver ces mêmes angles en résolvant les triangles* SPO *&* sPO, *de la maniére suivante qui est la plus courte.*

1ent *Dans le triangle-Sphérique* SPO *qui est rectangle en* O, *on connoit le côté* OP *qui est donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. avec l'hypoténuse* PDS *que l'on a trouvée de* 100 *deg.* 24 *m.* 20 *sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante* (a), *l'angle* SPO.

(a) N. 281.

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté OP donné de 48 d. 50 m. 10 s.	0.0583290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PDS trouvée de 100 deg. 24 m. 20 s.	9.2639543
Logar. du sinus du complément de l'angle SPO	9.3222833

(b) N. 103. *qui* (b) *donne* 12 *deg.* 7 *min.* 27 *sec. pour la valeur de ce complément*

ment; & par conséquent, 102 deg. 7 min. 27 sec. pour celle de cet angle, qui est obtus (a). Or, puisque l'angle SPO est de 102 deg. 7 min. 27 sec. l'angle SPZ qui en est le supplément, est de 77 deg. 52 min. 33 sec. de même que nous l'avons trouvé par le N° 358. (a) N. 225.

2^ent^ *Dans le triangle-Sphérique* sPO *qui est aussi rectangle en* O, *on connoît le côté* OP *qui est donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. avec l'hypoténuse* Pds *que l'on a trouvée de* 100 *deg.* 35 *min.* 7 *sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante* (b), *l'angle* sPO. (b) N. 281.

Complément du logar. de la tangente du complément du côté OP donné de 48 d. 50 m. 10 s.	0.0583290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse P*ds* trouvée de 100 d. 35 m. 7 s.	9.2715603
Logar. du sinus du complément de l'angle *s*PO -	9.3298893

qui (c) donne 12 deg. 20 min. 30 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 102 deg. 20 min. 30 sec. pour celle de cet angle, qui est obtus (d). Or, puisque l'angle sPO *est de 102 deg. 20 min. 30 sec. l'angle* sPZ *qui en est le supplément, est de 77 deg. 39 min. 30 sec. de même que nous l'avons aussi trouvé par le N° 358.* (c) N. 103. (d) N. 225.

SCHOLIE III.

361. *Si le Soleil étoit dans l'hémisphere septentrional, on trouveroit de la même maniére l'heure de son lever, & celle de son coucher. Mais les côtés* PDS * *&* Pds *des triangles* SPZ *&* sPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de proposer, sont les sommes, l'un du quart de cercle* PD *& de la déclinaison* DS, *& l'autre, du quart de cercle* Pd *& de la déclinaison* ds, *seroient alors les différences* PS * *&* Ps *de ces déclinaisons à ces mêmes quarts de cercles.* * Fig. 161. * Fig. 162.

SCHOLIE IV.

362. *Si l'on retranche de* 180 *deg. chaque* * Fig. 161. *partie* DE * & Ed *de l'arc* DEd *diurne, que l'on vient de trouver, l'une de* 77 *deg.* 52 *min.* 33 *sec. & l'autre de* 77 *deg.* 39 *min.* 30 *sec. les restes* 102 *deg.* 7 *min.* 27 *sec. &* 102 *deg.* 20 *min.* 30 *sec. sont les valeurs, l'un de la partie orientale* DQ *de l'arc nocturne* DQd*; & l'autre, de la partie occidentale* dQ, *de ce même arc.*

SCHOLIE V.

363. *Si après avoir ajoûté ensemble les deux* * Fig. 161. *parties* DE * & Ed *de l'arc diurne* DEd, *on prend la moitié* 77 *deg.* 46 *min.* 1 *sec.* $\frac{1}{2}$ *de leur somme* 155 *deg.* 32 *min* 3 *sec cette moitié est la valeur de l'arc semidiurne de Paris, pour le* 20. *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *telle qu'on l'auroit trouvée, si on l'avoit cherchée pour le lieu du Soleil au midi de ce jour.* Voyez le N° 349.

SCHOLIE VI.

364. *Si après avoir retranché de* 12 *heures l'heure à laquelle le Soleil s'est levé à Paris, le* 20. *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *on ajoûte le reste* 5 *heures* 11 *min.* 30 *sec. à l'heure à laquelle il s'est couché, la somme* 10 *heures* 22 *m.* 8 *sec. est la vraie durée de ce jour; c'est-à-dire, le temps que le Soleil a employé ce jour-là à parcourir l'hémisphere supérieur: & si l'on re-*

tranche de 24 heures cette même somme, le reste 13 heures 37 min. 52 sec. est la durée de la nuit; c'est-à-dire, le temps que le Soleil a employé à parcourir l'hémisphere inferieur.

SCHOLIE VII.

365. *Les temps que nous venons d'enseigner à trouver dans cet Usage(a), sont les temps vrais; c'est à-dire, ceux ausquels le centre du Soleil est effectivement à l'horison. Mais, comme il faut aussi connoître ceux ausquels il doit y paroître, nous allons reprendre la même Question que nous venons de proposer; & chercher ces derniers temps, au lieu des premiers que nous avions entrepris d'abord de trouver.* (a) N. 358.

366. *Soit donc* 1[ent], *le Soleil* S* *enfoncé sous l'horison oriental* HO, *de* 32 *min.* 20 *sec. qui est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soit en même temps sa déclinaison* DS *trouvée de la même maniére qu'au* N° 350, *de* 10 *deg.* 24 *min.* 20 *sec. pour le* 20. *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *à* 6 *heures du matin. Cela supposé:* * Fig. 160.

Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, *on connoît le côté* PDS *de* 100 *deg.* 24 *min.* 20 *sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle* PD, *& de la déclinaison* DS *que l'on a trouvée de* 10 *deg.* 24 *min.* 20 *sec. le côté* PZ, *de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur* OP *du Pôle* P, *qui est donnée de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. & le côté*

ZFS, de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF, & de la profondeur FS du Soleil, qui est aussi donnée de 32 min. 20 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére
(a) N. 293. *suivante (a), l'angle SPZ de ce triangle.*

Premiérement,

Valeur trouvée du côté PDS - - -	100 d.	24 m.	20 s.
Valeur trouvée du côté PZ - - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté ZFS - - - -	90	32	20
Somme de ces trois côtés - - - - - -	232	6	30
Moitié de cette somme - - - - - -	116	3	15
Différence du côté PDS à cette moitié -	15	38	55
Différence du côté PZ à cette même moitié	74	53	25

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté PDS trouvé de 100 deg. 24 min. 20 sec. - -	0.0072019
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PDS, trouvée de 15 deg. 38 min. 55 sec. - - -	9.4309403
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, trouvée de 74 deg. 53 min. 25 sec. - - -	9.9847201
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, ou DPE - - - - - -	19.6044945
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - - - - - -	9.8022472

(b) N. 103. *qui (b) donne 39 deg. 21 min. 46 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 78 deg. 43 min. 32 sec. pour celle*
(c) N. 196. *de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc DE qui étoit la partie orientale de l'arc diurne du jour proposé. Donc, cette partie étoit de 78 deg. 43 min. 32 sec. Mais, 78 deg. 43 min. 32 sec. de l'Equateur étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, produisent 5 heures 14 min. 54 sec. Donc, si de 12 heures on retranche 5 heures 14 min. 54 sec. le reste 6 heures 45 min. 6 sec. est le temps auquel le Soleil a paru se lever à Paris le jour proposé; & par conséquent, le matin de ce jour, le temps apparent a précedé de 3 min. 24 sec. le temps vrai que nous avons trouvé par le N° 358.*

367. *Soit en second lieu le Soleil* s * *des-* * Fig. 160.
cendu sous l'horison occidental HO, *de* 32 *min.* 20 *sec. qui est aussi la distance à laquelle la réfraction le fait disparoître. Soit aussi sa déclinaison* ds *trouvée de la même manière qu'au* N° 350, *de* 10 *deg.* 35 *min.* 7 *sec. pour le* 20 *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *à* 6 *heures du soir. Cela supposé :*

Dans le triangle Sphérique obliquangle sPZ, *on connoît le côté* Pds *de* 100 *deg.* 35 *min.* 7 *sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle* Pd, *& la déclinaison* ds *que l'on a trouvée de* 10 *deg.* 35 *min.* 7 *sec. le côté* PZ *qui de même que dans le triangle précedent, est le complément* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. de la hauteur* OP *du Pôle* P, *qui est donnée de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. & le côté* Zfs, *de* 90 *deg.* 32 *min.* 20 *sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle* Zf, *& de la profondeur* fs *du Soleil, qui est aussi donnée de* 32 *min.* 20 *sec. Ainsi, l'on cherche encore de la manière suivante (a), l'angle* sPZ *de ce* (a) N. 293.
dernier triangle.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté P*ds* - - -	100 d.	35 m.	7 s.
Valeur trouvée du côté PZ - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté Z*fs* - - -	90	32	20
Somme de ces trois côtés - - - -	232	17	17
Moitié de cette somme - - - - - -	116	8	38 $\frac{1}{2}$
Différence du côté P*ds* à cette moitié -	15	33	31 $\frac{1}{2}$
Différence du côté PZ à cette même moitié	74	58	48 $\frac{1}{2}$

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté P*ds* trouvé de 100 deg. 35 min. 7 sec. - - - -	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec, - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté P*ds*, trouvée de 15 deg. 33 min. 31 sec. ½ - - -	9.4285013
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, trouvée de 74 deg. 58 min. 48 sec. ½ - - - -	9.9849034
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé *s*PZ, ou *d*PE - - - - - -	19.6024911
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cette angle. - - - - - -	9.8012455

(a) N. 103. *qui* (a) *donne* 39 *d.* 15 *m.* 17 *f. pour la valeur de cette moitié;& par*
(b) N. 196. *conséquent*, 78 *d.* 30 *m.* 34 *f. pour celle de cet angle. Or* (b), *cet angle a pour mesure l'arc* Ed, *qui étoit la partie occidentale de l'arc diurne du jour proposé. Donc, cette partie étoit de* 78 *deg.* 30 *min.* 34 *sec. Mais*, 78 *deg.* 30 *min.* 34 *sec. de l'Equateur étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, produisent* 5 *h.* 14 *m.* 2 *f. Donc, le* 20. *du mois d'Octobre de l'année* 1749. *le Soleil a paru se coucher sous l'horison de Paris, à* 5 *heures* 14 *min.* 2 *sec. & par conséquent, le soir de ce jour, le temps vrai que nous avons trouvé par le N°* 358. *a précedé de* 3 *min.* 24 *sec. le temps apparent.*

SCHOLIE VIII.

368. *Ce que nous avons dit dans les Scholies* 3, 4, 5 *&* 6, *convient pareillement à la septieme.*

SCHOLIE IX.

369. *Enfin, c'est en cherchant de la maniére dont nous venons de le faire dans la septiéme Scholie, les heures apparentes du lever du Soleil & de son coucher pour chaque jour de l'année, que l'on en construit des Tables telles qu'on les trouve ordinairement dans les Ephémérides, & dans la plus grande partie de nos Calendriers.*

IX. USAGE.

370. *Connoiſſant la hauteur du Pôle ſur l'horiſon d'un certain lieu, trouver l'heure à laquelle l'Aurore commence à paroître un certain jour, ſur cet horiſon; & celle à laquelle le Crépuſcule y finit le même jour.*

ON demande l'heure à laquelle l'Aurore a commencé à paroître ſur l'horiſon de Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. & celle à laquelle le Crépuſcule a fini le même jour, ſur le même horiſon.

Solution. On a remarqué que cette foible lumiére qui précede le lever du Soleil, & qui dure encore quelque temps après ſon coucher, ne commence à paroître, & ne s'éteint entiérement, que lorſque le Soleil eſt enfoncé de 18 degrés dans l'hémiſphére inférieur. Ainſi, ſoit 1ent le Soleil S * ſitué dans cet hémiſphere, *Fig. 160.
à 18 deg. de profondeur ſous l'horiſon oriental HO. Soit auſſi ſa déclinaiſon DS trouvée de la même maniére qu'au N° 350, de 10 d. 24 min. 20 ſec. pour le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du matin. Cela ſuppoſé :

Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PDS de 100 d. 24 m. 20 ſ. puiſque ce côté eſt la ſomme du quart de cercle PD, & de la déclinaiſon DS que l'on a trouvée de 10 deg. 24 min. 20 ſec. le côté PZ, de 41 deg. 9 min. 50 ſec. puiſque ce côté eſt le com-

plément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté ZFS, de 108 deg. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF, & de la profondeur FS du Soleil, qui est aussi donnée de 18 deg. Ainsi,
(a) N. 293. l'on cherche de la maniére suivante (a), l'angle SPZ de ce triangle.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté PDS - - - -	100 *d.*	24 *m.*	20 *s.*
Valeur trouvée du côté PZ - - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté ZFS - - - -	108	0	0
Somme de ces trois côtés - - - -	249	34	10
Moitié de cette somme - - - - -	124	47	5
Différence du côté PDS *à cette moitié* -	24	22	45
Différence du côté PZ *à cette même moitié* -	83	37	15

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté DPS *trouvé de* 100 *deg.* 24 *m.* 20 *sec.* - - - -	0.0072019
Complément du logarithme du sinus du côté PZ *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PDS, *trouvée de* 24 *deg.* 22 *min.* 45 *sec.* - - -	9.6157115
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, *trouvée de* 83 *deg.* 37 *min.* 15 *sec.* - - -	9.9973026
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, *ou* DPE - - - - - - -	19.8018482
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - - - - - - - -	9.9009241

(b) N. 103. qui (b) donne 52 deg. 45 min. 6 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 105 deg. 30 min. 12 sec. pour celle
(c) N. 196. de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc DE. Donc, l'arc DE est de 105 deg. 30 min. 12 sec. & par conséquent, si après avoir réduit cet arc en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, on retranche de 12 heures le temps qu'il produit, le reste 4 heures 58 min. est l'instant auquel l'Aurore a commencé à paroître sur l'horison de Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749.

SOIENT

SOIENT en second lieu le Soleil *s* * enfoncé de 18 deg. sous l'horison occidental HO; & sa déclinaison *ds* trouvée de la même maniére qu'au N° 350, de 10 deg. 35 min. 7 sec. pour le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du soir. Cela encore supposé: * Fig. 168.

Dans le triangle-Sphérique obliquangle *s*PZ, on connoît le côté P*ds* de 100 deg. 35 min. 7 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. & le côté Z*fs* de 108 deg. par les mêmes raisons que nous avons dites dans la résolution du triangle précedent. Ainsi, l'on cherche aussi de la maniére suivante (*a*), l'angle *s*PZ. (*a*) N. 293.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté Pds - - - - -	100 d.	35 m.	7 s.
Valeur trouvée du côté PZ - - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté Zfs - - - - -	108	0	0
Somme de ces trois côtés - - - -	249	44	57
Moitié de cette somme - - - - - - -	124	52	28 ½
Différence du côté Pds *à cette moitié* - -	24	17	21 ½
Différence du côté PZ *à cette même moitié*	83	42	38 ½

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté Pds *trouvé de 100 deg. 35 min. 7 sec.* - -	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ *trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.* - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté Pds, *trouvée de 24 deg. 17 min. 21 sec.* ½ - -	9.6142055
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, *trouvée de 83 deg. 42 min. 38 sec.* ½ -	9.9973782
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé sPZ, *ou* dPE - - -	19.8006699
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - - -	9.9003349

qui (*b*) donne 52 deg. 38 min. 59 sec. *p. m.* pour la valeur (*b*) N. 203.

de cette moitié ; & par conséquent, 105 deg. 17 min. 58 sec. pour celle de cet angle. Or (a), cet angle a pour mesure l'arc Ed. Donc, l'arc Ed est de 105 deg. 17 min. 58 sec. & par conséquent, puisque 105 deg. 17 min. 58 sec. de l'Equateur étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, produisent 7 heures 1 min. 11 sec. il étoit 7 heures 1 min. 11 sec. lorsque le Crépuscule a fini à Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749.

(a) N. 196.

SCHOLIE I.

371. *Si le Soleil étoit dans les Signes septentrionaux, on trouveroit de la même maniére le commencement de l'Aurore & la fin du Crépuscule. Mais les côtés* PDS * *&* Pds *des triangles* SPZ *&* sPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de proposer, sont les sommes, l'un du quart de cercle* PD *& de la déclinaison* DS, *& l'autre du quart de cercle* Pd *& de la déclinaison* ds, *seroient alors les différences de ces déclinaisons à ces mêmes quarts de cercles.*

* Fig. 160.

SCHOLIE II.

372. *C'est par des calculs pareils à ceux que nous venons de faire dans cet Usage, que l'on construit des Tables des heures ausquelles l'Aurore commence & le Crépuscule finit, chaque jour de l'année.*

X. USAGE.

373. *Connoissant la déclinaison du Soleil, sa hauteur sur l'horison, & celle du Pôle sur le même horison, trouver quelle heure il est.*

ON donne la déclinaiſon DS * du Soleil S de 18 deg. 52 min. 20 ſec. vers le ſeptentrion ; ſa hauteur FS ſur l'horiſon HO, de 35 deg. 25 min. avec la hauteur OP du Pôle P ſur le même horiſon, de 48 deg 50 min. 10 ſec. & il faut trouver quelle heure il eſt ; c'eſt-à-dire, la diſtance DE du Soleil au Méridien HZO. * Fig. 163.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PS de 71 deg. 7 min. 40 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la déclinaiſon DS qui eſt donnée de 18 deg. 52 min. 20 ſec. le côté PZ, de 41 deg. 9 min. 50 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui eſt donnée de 48 deg. 50 min. 10 ſec. & le côté SZ, de 54 deg. 35 min. puiſque ce côté eſt le complément de la hauteur FS du Soleil, qui eſt auſſi donnée de 35 deg. 25 min. Ainſi, l'on cherche de la maniére ſuivante (a), l'angle SPZ de ce triangle. (a) N. 293.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté PS - - - -	71 *d.*	7 *m.*	40 *ſ.*
Valeur trouvée du côté PZ - - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté SZ - - - -	54	35	0
Somme de ces trois côtés - - - - - -	166	52	30
Moitié de cette ſomme - - - - - -	83	26	15
Différence du côté PS *à cette moitié* - -	12	18	35
Différence du côté PZ *à cette même moitié* -	42	16	25

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté PS *trouvé de 71 deg. 7 min. 40 sec.* - - -	0.0239977
Complément du logarithme du sinus du côté PZ *trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.* - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PS, *trouvée de 12 deg. 18 min. 35 sec.* - -	9.3287793
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, *trouvée de 42 deg. 16 min. 25 sec.* -	9.8278032
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, *ou* DPE - - -	19.3622124
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - - -	9.6811062

(a) N. 103. qui (a) donne 28 deg. 40 min. 32 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 57 deg. 21 min. 4 sec. pour celle (b) N. 196. de cet angle; c'est-à-dire, pour celle de l'arc DE qui (b) en est la mesure. Or, cette derniére valeur étant réduite en temps, produit 3 heures 49 min. 24 sec. Ainsi, il est 3 heures 49 min. 24 sec. après midi, si le Soleil est dans l'hémisphere occidental, & 8 heures 10 min. 36 sec. du matin, si le Soleil est dans l'autre hémisphere.

SCHOLIE I.

374. *Si le Soleil étoit dans l'hémisphere méridional, on trouveroit de la même maniére sa* * Fig. 163. *distance au Méridien. Mais le côté* PS * *du triangle* SPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de proposer, est la différence de la déclinaison* DS *au quart de cercle* PD, *seroit alors* * Fig. 164. *la somme* PDS * *de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.*

375. *Mais, si le Soleil étoit dans l'Equateur, la résolution de ce Problême deviendroit très-facile, puisqu'il ne s'agiroit alors que de* * Fig. 163. *trouver le côté* sE * *du triangle-Sphérique* sZE

qui seroit rectangle en E, *& dans lequel on connoîtroit le côté* ZE *qui est toujours égal à la hauteur* OP *du Pôle* P, *qui est donnée; avec l'hypoténuse* SZ *qui seroit le complément de la hauteur* fs *du Soleil, qui est aussi donnée.*

Ainsi, si l'on demande quelle heure il est, par exemple à Paris, lorsque le Soleil étant dans l'Equateur, il se trouve élevé de 32 *deg.* 27 *m. sur l'horison de cette Ville; on connoît dans le triangle-Sphérique* sZE *qui est rectangle en* E, *le côté* ZE *de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. puisque le Pôle est élevé de ce nombre de degrés sur l'horison de Paris, avec l'hypoténuse* sZ *de* 57 *deg.* 33 *m. puisque cette hypoténuse est le complement de la hauteur* fs *qui est donnée de* 32 *deg.* 27 *min. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante* (*a*), *le côté* sE *de ce triangle.* (a) N. 272.

Complément du logarithme du sinus du complément du côté ZE donné de 48 deg. 50 min. 10 s.	0.1816322
Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse *s*Z trouvée de 57 deg. 33 min. - - -	9.7296211
Logarithme du sinus du complément du côté demande *s*E - - - - - -	9.9112533

qui (*b*) *donne* 54 *deg.* 36 *min.* 18 *sec.* p. m. *pour la valeur de ce complément; & par conséquent,* 35 *deg.* 23 *min.* 42 *sec. pour celle de ce côté. Or, cette dernière valeur étant réduite en temps, produit* 2 *h.* 21 *m.* 34 *s. Ainsi, il est à Paris* 2 *h.* 21 *m.* 34 *s. après midi, à l'instant proposé, si le Soleil est dans l'hémisphere occidental; &* 9 *heures* 38 *m.* 26 *s. du matin, s'il est dans l'autre hémisphere.* (b) N. 103.

SCHOLIE II.

376. *Si au lieu de donner la hauteur du Soleil sur l'horison, on donnoit sa profondeur* fs * *sous* * Fig. 164.

le même horiſon, cela ne changeroit rien à la maniére de chercher ſa diſtance au Méridien; puiſqu'il ſeroit pareillement queſtion de trouver (a) N. 293. (a) *la valeur de l'angle* sPZ *du triangle-Sphérique obliquangle* sPZ, *dont on connoîtroit tous les côtés* Ps, PZ *&* Zfs.

On pourroit auſſi chercher de la maniére dont nous venons de le faire dans cet Uſage, quelle eſt la diſtance du Soleil au Méridien HZO, *lorſque ſa hauteur ſur l'horiſon* HO *eſt égale à la profondeur donnée* fs; *& cette diſtance ſeroit égale à celle de cet Aſtre au Méridien* HNO, *qui eſt celle que l'on cherche.*

Enfin, on pourroit en renverſant la Sphére, prendre la profondeur fs *du Soleil ſous l'horiſon* HO *par ſa hauteur ſur le même horiſon; & chercher immédiatement ſa diſtance au Méridien* HNO, *par rapport au Nadir* N, *qui deviendroit alors le Zénith, & au Pôle* p, *de la même maniére dont nous l'avons fait dans cet Uſage, par rapport au Zénith* Z, *& au Pôle* P.

XI. USAGE.

377. *Connoiſſant l'Azimuth du Soleil, ſa déclinaiſon, & ſa hauteur ſur l'horiſon, trouver quelle heure il eſt.*

* Fig. 165. ON donne l'Azimuth HF * du Soleil, de 46 deg. 25 min. ſa déclinaiſon DS de 18 deg. 53 min. vers le ſeptentrion; avec ſa hauteur FS ſur l'horiſon HO, de 52 deg. 41 min. 3 ſec.

& il faut trouver quelle heure il eſt ; c'eſt-à-dire, la diſtance DE de cet Aſtre au Méridien HZO.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PS de 71 d. 7 min. puiſque ce côté eſt le complément de la déclinaiſon DS, qui eſt donnée de 18 deg. 53 min. le côté ZS de 37 deg. 18 min. 57 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la hauteur FS du Soleil, qui eſt donnée de 52 deg. 41 min. 3 ſ. & l'angle SZP, ou FZP, de 133 d. 35 min. puiſque cet angle eſt le ſupplément de l'angle FZH, dont la meſure FH eſt auſſi donnée de 46 deg. 25 min. Ainſi, l'on cherche de la maniére ſuivante (*a*), l'angle SPZ. (*a*) N. 289.

Complément du logarithme du ſinus du côté PS *trouvé de* 71 *deg.* 7 *min.* - - -	0.0240264
Logarithme du ſinus du côté ZS *trouvé de* 37 *deg.* 18 *min.* 57 *ſec.* - - -	9.7826218
Logarithme du ſinus de l'angle SZP *trouvé de* 133 *deg.* 35 *min.* - - - -	9.8599619
Logarithme du ſinus de l'angle demandé SPZ, *ou* DPE - - - - -	19.6666101

qui (*b*) donne 27 deg. 39 min. 7 ſec. *p. m.* pour la valeur de cet angle ; & par conſéquent, pour celle de l'arc DE qui (*c*) en eſt la meſure. Or, cette valeur étant réduite en temps, produit 1 heure 50 min. 36 ſec. Ainſi, il eſt 1 heure 50 min. 36 ſec. après midi, à l'inſtant propoſé, ſi le Soleil eſt dans l'hémiſphere occidental ; & 10 heures 9 min. 24 ſec. du matin, s'il eſt dans l'autre hémiſphere.

(*b*) N. 103.
(*c*) N. 195.

SCHOLIE I.

378. *Si au lieu de donner la hauteur* FS * *du Soleil ſur l'horiſon* HO, *on avoit donné la* * Fig. 165.

hauteur OP *du Pôle* P *sur le même horison, de 48 deg. 50 min. 10 sec. on auroit alors connu dans le triangle-Sphérique obliquangle* SPZ, *le côté* PS *de* 71 *deg.* 7 *min. puisque ce côté auroit été le même que dans cet Usage; le côté* PZ, *de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. puisqu'il auroit été le complément de cette hauteur donnée* OP; *& l'angle* SPZ *de* 133 *deg.* 35 *min. puisqu'il auroit aussi été le même que dans ce même Usage. Ainsi,*
(a) N. 297. *il auroit fallu (a) supposer qu'un arc* PM *d'un grand cercle auroit été tiré du sommet de l'angle* P *perpendiculairement au côté* SZ, (*prolongé vers* M, *parce que les angles* PSZ *&* PZS *sont de différente espece*); *& l'on auroit ensuite cherché de la maniére suivante, l'angle* SPZ.

1[ent] *dans le triangle-Sphérique* MPZ *qui* [c] *auroit été rectangle en* M, *on auroit connu l'angle* PZM *de* 46 *deg.* 25 *min. puisque cet angle auroit été le supplément de l'angle* SZP *que l'on auroit trouvé de* 133 *deg.* 35 *min. avec l'hypoténuse* PZ *que l'on auroit aussi trouvée de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. Ainsi, l'on auroit cher-*
(b) N. 283. *ché de la maniére suivante (b), l'angle* ZPM.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse PZ trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	0.1233031
Logarithme de la tangente du complément de l'angle PZM trouvé de 46 deg. 25 min. - -	9.9785149
Logarithme de la tangente de l'angle ZPM -	10.1018180

(c) N. 103. *qui (c) auroit donné 51 deg. 39 min. 21 sec. pour la valeur de cet angle.*

2[ent]

2^{ent} *Dans le triangle-Sphérique obliquangle* SPZ, *on auroit connu le côté* PZ *qui auroit été trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. le côté* PS *qui auroit aussi été trouvé de* 71 *deg.* 7 *m. & l'angle au sommet* ZPM *qui viendroit d'être trouvé de* 51 *deg.* 39 *min.* 21 *sec. Ainsi, l'on auroit cherché de la maniére suivante (a), l'autre angle au sommet* SPM. (a) N. 305.

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté PZ trouvé de 41 d. 9 m. 50 s.	9.9416710
Logarithme de la tangente du complément du côté PS trouvé de 71 deg. 7 min. - -	9.5340916
Logar. du sinus du complément de l'angle ZPM trouvé de 51 deg. 39 min. 21 sec. - -	9.7926604
Logar. du sinus du complément de l'angle SPM	29.2684230

qui (b) auroit donné 10 *deg.* 41 *min.* 32 *sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent,* 79 *deg.* 18 *min.* 28 *sec. pour celle de cet angle, de laquelle ayant retranché la valeur de l'angle* ZPM, *qui viendroit d'être trouvée de* 51 *d.* 39 *m.* 21 *s. il auroit resté* 27 *deg.* 39 *min.* 7 *sec. pour celle de l'angle demandé* SPZ. (b) N. 103.

SCHOLIE II.

379. *Si le Soleil étoit dans l'hémisphere méridional, cela ne changeroit rien à la maniére de résoudre cette Question. Mais le côté* PS * *du triangle* SPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de proposer est la différence de la déclinaison* DS *au quart de cercle* PD, *seroit alors la somme* PDS * *de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.* * Fig. 165. * Fig. 164.

XII. USAGE.

380. *Connoissant la déclinaison du Soleil, sa*

2^ent Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le ſegment PM que l'on vient de trouver de 23 deg. 36 min. 47 ſec. le ſegment MS que l'on vient auſſi de trouver de 47 deg. 42 min. 9 ſec. & le côté PZ que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 ſec. Ainſi,
(a) N. 303. l'on cherche de la maniére ſuivante (a), l'autre côté SZ.

Complément du logarithme du ſinus du complément du ſegment PM *trouvé de* 23 *deg.* 36 *min.* 47 *ſec.*	0.0379759
Logarithme du ſinus du complément du ſegment MS *trouvé de* 47 *deg.* 42 *min.* 9 *ſec.* - - - -	9.8280022
Logarithme du ſinus du complément du côté PZ *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *ſec.* - - - -	9.8766969
Logar. du ſinus du complément du côté SZ - -	19.7426750

(b) N. 103. qui (b) donne 33 deg. 34 min. 7 ſec. pour la valeur de ce complément; & par conſéquent, pour celle de la hauteur demandée FS, puiſque cette hauteur eſt ce complément même.

SCHOLIE I.

381. 1^ent *Si le Soleil étoit dans l'hémiſphere méridional, on trouveroit de la même maniére*
* Fig. 166. *ſa hauteur ſur l'horiſon. Mais le côté* PS * *du triangle* SPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de propoſer, eſt la différence de la déclinaiſon* DS *au quart de cercle* PD, *ſeroit*
* Fig. 164. *alors la ſomme* PDS * *de cette déclinaiſon & de ce même quart de cercle.*

382. 2^ent *Si le Soleil étoit dans l'Equateur, la réſolution de ce Problême deviendroit très-facile; puiſqu'il ne s'agiroit alors que de trou-*

de 18 deg. 41 min. 4 sec. & l'angle SPZ, ou DPE, de 60 deg. puisque la distance DE du Soleil au Méridien HZO, qui (a) en est la mesure, est donnée de 4 heures qui répondent à 60 deg. de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) qu'un arc ZM † d'un grand cercle est tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au cercle horaire PD, c'est-à-dire au côté PS, on cherche de la maniére suivante, le côté SZ. (a) N.196. (b) N.297.

1^{ent} Dans le triangle-Sphérique PZM qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse PZ que l'on a trouvée de 41 deg. 9 min. 50 s. & l'angle MPZ, ou SPZ, que l'on a aussi trouvé de 60 deg. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), le segment PM. (c) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle MPZ *trouvé de* 60 *deg.* - - - -	0.3010300
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PZ *trouvée de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*	10.0583290
Logar. de la tang. du complément du segment PM	10.3593590

qui (d) donne 66 deg. 23 min. 13 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 23 deg. 36 min. 47 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté PS que l'on a trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec. laisse 47 deg. 42 min. 9 sec. pour la valeur du segment MS. (d) N.103.

† Cet arc passe dans le triangle SPZ, tant que l'angle horaire SPZ est plus petit qu'un angle droit; c'est-à-dire, tant qu'il n'y a pas 6 heures de différence entre l'heure donnée & midi. Mais, lorsque cette différence est de plus de 6 heures, cet angle devient obtus, & l'arc perpendiculaire ZM qui tombe alors hors du triangle SPZ, rencontre le cercle horaire SP autant au-delà du Pôle P, qu'il le rencontre en-deçà avant 6 heures.

mesure seroit la hauteur O P *du Pôle* P, *qui est aussi donnée.*

Ainsi, si l'on vouloit sçavoir quelle étoit la vraie hauteur FS *du Soleil, sur l'horison, par exemple de Paris, le* 24. *du mois de Juin de l'année* 1749. *à* 6 *heures du soir : Il faudroit chercher (a) de la même maniére dont nous l'avons déja fait dans plusieurs des Usages précedents, quelle étoit la déclinaison* DS *de cet Astre à cet instant ; & comme on trouveroit que cette déclinaison étoit alors de* 23 *deg.* 26 *min.* 12 *sec. on connoîtroit dans le triangle-Sphérique rectangle* DSF, *l'hypoténuse* DS, *puisque cette hypoténuse n'est autre chose que cette déclinaison même ; & l'angle* FDS, *de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. puisque le Pôle est élevé de ce nombre de degrés sur l'horison de Paris. Ainsi, l'on chercheroit de la*
(b) N. 263. *maniére suivante (b), la hauteur demandée* FS.

Logarithme du sinus de l'angle FDS donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - -	9.8766969
Logarithme du sinus de l'hypoténuse DS trouvée de 23 deg. 26 min. 12 sec. - - - - -	9.5995940
Logar. du sinus de la hauteur demandée FS - -	19.4762909

(c) N. 103. *qui (c) donneroit* 17 *deg.* 25 *min.* 23 *sec. pour cette hauteur.*

Mais, on peut remarquer que l'on trouveroit
(d) N. 266. *aussi cette même hauteur, en cherchant (d) l'hypoténuse* SZ *du triangle-Sphérique* SPZ *qui seroit rectangle en* P ; *& dans lequel on connoitroit le côté* SP, *qui seroit le complément de la déclinaison* DS ; *avec le côté* PZ *qui est le complément de la hauteur* OP *du Pôle* P.

384. 4^{ent}

Enfin, si le Soleil étoit au Méridien, il auroit pour hauteur la différence de sa déclinaison à la hauteur de l'Equateur, lorsqu'il seroit dans les signes méridionaux; & la somme de sa déclinaison & de la hauteur de l'Equateur, lorsqu'il seroit dans les signes septentrionaux. Ainsi, il n'y auroit alors rien de plus facile que de trouver sa hauteur sur l'horison.

SCHOLIE II.

385. *Si au lieu de demander la hauteur du Soleil sur l'horison* HO*, *on proposoit au contraire de trouver sa profondeur* fs *sous le même horison; il faudroit chercher la valeur du côté* Zfs *du triangle-Sphérique obliquangle* sPZ, *de la même maniére dont nous avons cherché celle du côté* ZS *du triangle* SPZ *de la Fig.* 166. *& l'excès de cette valeur sur* 90 *deg. seroit celle de la profondeur demandée.* * Fig. 164.

On pourroit aussi trouver cette même profondeur, en renversant la Sphére; & en cherchant ensuite la hauteur fs *du Soleil sur l'horison* HO, *par rapport au Nadir* N *qui deviendroit alors le Zénith, & au Pôle* p, *de la même maniére dont nous l'avons cherchée sur le même horison, par rapport au Zénith* Z* *& au Pôle* P; *puisque la hauteur d'un Astre sur un horison par rapport à l'un des Pôles de cet horison, est la profondeur de ce même Astre sous ce même horison, par rapport à son autre Pôle; & au contraire.* * Fig. 166.

SCHOLIE III.

386. *Enfin, c'est par ce que nous venons d'enseigner dans cet Usage, que l'on construit des Tables des différentes hauteurs du Soleil sur l'horison d'un certain lieu, à chaque heure du jour; & ces Tables sont très utiles dans la Gnomonique.*

XIII. USAGE.

387. *Connoissant la distance du Soleil au Méridien, sa déclinaison, & sa hauteur sur l'horison d'un certain lieu, trouver la hauteur du Pôle sur le même horison.*

Le 14. du mois de Mai de l'année 1749. à 8 heures du matin, on a observé la vraie hauteur FS * du Soleil S sur l'horison HO, de 33 deg. 34 min. 7 sec. & il faut trouver la hauteur OP du Pôle P sur cet horison.

* Fig. 168.

Solution. Après avoir trouvé de la même maniére dont nous l'avons fait au N° 380, que le 14. du mois de Mai de l'année 1749. à 8 h. du matin, la déclinaison DS du Soleil étoit de 18 deg. 41 min. 4 sec. vers le septentrion; on connoît dans le triangle-Spherique obliquangle SPZ, le côté PS de 71 deg. 18 min. 56 sec. puisque ce côté est le complément de cette déclinaison; le côté SZ de 56 deg. 25 m. 53 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur FS que l'on a observée de 33 deg. 34 min. 7 sec. & l'angle SPZ, ou DPE, de

60 deg.

60 deg. puisque la distance DE du Soleil au Méridien, qui (*a*) en est la mesure, est donnée (*a*) N. 196.
de 4 heures qui répondent à 60 deg. de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) qu'un (*b*) N. 297.
arc SM d'un grand cercle est tiré du sommet de l'angle S perpendiculairement au côté PZ (prolongé vers M, parce que les angles SPZ & SZP sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté PZ.

1ent Dans le triangle-Sphérique SPM qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse PS que l'on vient de trouver de 71 deg. 18 m. 56 sec. avec l'angle SPZ, ou SPM, que l'on vient aussi de trouver de 60 deg. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le segment (*c*) N. 284.
PZM.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle SPM *trouvé de 60 deg.* - - - - -	0.3010300
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PS *trouvée de 71 deg. 18 min. 56 sec.*	9.5291463
Logar. de la tang. du compl. du segment PZM - -	9.8301763

qui (*d*) donne 34 deg. 4 min. 22 sec: pour la valeur de ce (*d*) N. 103.
complément ; & par conséquent, 55 deg. 55 min. 38 sec. pour celle de ce segment.

2ent Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PS que l'on a trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec. le côté SZ que l'on a aussi trouvé de 56 deg. 25 min. 53 sec. & le segment PZM que l'on vient de trouver de 55 deg. 55 min. 38 sec. Ainsi, l'on trouvera de la maniére suivante (*e*), l'autre seg- (*e*) N. 303.
ment ZM.

Complément du logarithme du sinus du complément du côté PS *trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec.* -	0.4943676
Logarithme du sinus du complément du côté SZ *trouvé de 56 deg. 25 min. 53 sec.* - - - - - -	9.7426744
Logarithme du sinus du complément du segment PZM *trouvé de 55 deg. 55 min. 38 sec.* - -	9.7483784
Logarithme du sinus du complément du segment ZM	19.9854204

(a)N. 103. qui (a) donne 75 deg. 14 min. 12 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 14 deg. 45 min. 48 sec. pour celle de ce segment. Mais, cette derniére valeur étant retranchée de celle du segment PZM que l'on vient de trouver de 55 deg. 55 min. 38 sec. laisse 41 deg. 9 min 50 sec. pour celle du côté PZ. Ainsi, puisque ce côté est le complément de la hauteur demandée OP, cette hauteur est de 48 deg. 50 min. 10 sec.

SCHOLIE I.

388. 1ent *Si le Soleil étoit dans l'hémisphere méridional, cela ne changeroit rien à la manière dont nous venons de trouver la hauteur du Pôle.*
* Fig. 168. *Mais le côté* PS * *du triangle* SPZ, *qui dans l'exemple que nous venons de proposer est la différence de la déclinaison* DS *au quart de cercle*
* Fig. 164. PD, *seroit alors la somme* PDS * *de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.*

389. 2ent *Si le Soleil étoit dans l'Equateur, la résolution de ce Problême deviendroit très-facile; puisqu'il ne s'agiroit alors que de trou-*
* Fig. 166. *ver le côté* ZE * *du triangle-Sphérique* sZE *qui seroit rectangle en* E; *& dans lequel on connoitroit l'hypoténuse* Zs *qui seroit le complément de la hauteur* fs, *laquelle est donnée; avec le côté* sE *qui seroit la distance du Soleil au Méridien, laquelle est aussi donnée.*

Ainsi, si ayant observé la vraie hauteur fs *du Soleil dans l'Equateur, de* 34 *deg.* 45 *min.* 9 *sec. à* 10 *heures du matin, on veut sçavoir quelle est la hauteur* OP *du Pôle* P *sur l'horison* HO *du lieu auquel on a fait cette observation: on connoît dans le triangle-Sphérique* sZE *qui est rectangle en* E, *l'hypoténuse* Zs *de* 55 *d.* 14 *min.* 51 *sec. puisque cette hypoténuse est le complément de cette hauteur* fs; *avec le côté* sE *de* 30 *deg. puisque la distance du Soleil au Méridien, dont ce côté est la mesure, est donnée de* 2 *heures qui répondent à* 30 *deg. de l'Equateur. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante*(a), *le côté* ZE. (a) N. 272.

Complément du logarithme du sinus du complément du côté sE trouvé de 30 deg. - - -	0.0624694
Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse Zs trouvée de 55 deg. 14 min. 51 sec.	9.7558997
Logarithme du sinus du complément du côté ZE	9.8183691

qui (b) *donne* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent,* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. pour celle de ce côté, lequel est égal à la hauteur demandée* OP. (b) N. 103.

390. 3^ent *Si le Soleil étoit à l'horison, la résolution du Problême seroit aussi facile que celle du précedent; puisqu'il ne s'agiroit que de trouver le côté* OP * *du triangle-Sphérique* SPO *qui seroit rectangle en* O; & *dans lequel on connoîtroit l'hypoténuse* PS *qui seroit le complément de la déclinaison* DS, *laquelle est donnée; avec l'angle* SPO, *ou* DPO, *qui seroit le supplément de l'angle* DPE *dont la mesure, qui* (c) *est la distance* DE *du Soleil au Méridien, est aussi donnée.* * Fig. 162. (c) N. 196.

Ainsi, si par exemple, pour construire une Table des Climats de demi-heure, on se proposoit
* Fig. 162. *de trouver la hauteur* OP* *du Pôle* P *sur l'horison* HO *d'un lieu où le plus long jour de l'année est de 16 heures, & auquel le Soleil se leve par consequent à 4 heures du matin; on connoîtroit dans le triangle-Sphérique* SPO *qui seroit rectangle en* O, *l'hypoténuse* PS *de 66 d. 31 m. 30 sec. puisque cette hypoténuse seroit le complément de la plus grande déclinaison* DS *du Soleil, laquelle est connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. On connoîtroit aussi dans le même triangle, l'angle* SPO, *ou* DPO, *de 60 deg. puisque cet angle a pour supplément l'angle* DPE, *dont*
(a) N. 196. *(a) la mesure* DE *est la distance du Soleil au Méridien, laquelle seroit donnée de 8 heures, & par conséquent de 120 deg. Ainsi, l'on cher-*
(b) N. 284. *cheroit de la maniére suivante (b), le côté* OP *qui est la hauteur demandée.*

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle SPO trouvé de 60 deg. - -	0.3010300
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PS trouvée de 66 deg. 31 min. 30 sec. - - - - - -	9.6377834
Logarithme de la tangente du complément de la hauteur demandée OP - - - - - - - -	9.9388134

(c) N. 103. *qui (c) donneroit 40 deg. 58 min. 38 sec.* p. m. *pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 49 deg. 1 min. 22 sec. pour celle de cette hauteur.*

Mais on peut remarquer que si l'on réduisoit en degrés de l'Equateur les heures dont l'instant que l'on propose pour le lever du Soleil differe

de 6 heures du matin, on auroit la différence ascensionnelle FD *. *Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, on connoîtroit dans le triangle-Sphérique* FSD *qui seroit rectangle en* D, *le côté* FD *de* 30 *deg. avec le côté* DS *de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec. & par conséquent, on chercheroit de la maniére suivante* (*a*), *l'angle* DFS *que l'Equateur* EQ *forme avec l'horison* HO. * Fig. 162. (a) N. 276.

Complément du logarithme du sinus du côté FD trouvé de 30 deg. - - - - - - - - -	0.3010300
Logarithme de la tangente du côté DS connu de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.6377834
Logarithme de la tangente de l'angle DFS - -	9.9388134

qui (*b*) *donneroit* 40 *deg.* 58 *min.* 38 *sec. pour la valeur de cet angle, dont le complément* 49 *deg.* 1 *min.* 22 *sec. seroit la hauteur demandée* OP †. (b) N. 103.

391. 4^ent *Enfin, si au lieu de donner la hauteur du Soleil sur l'horison, on donnoit sa profondeur* fs * *sous le même horison, cela ne changeroit rien à la maniére de trouver la hauteur* OP *du Póle* P; *puisqu'il seroit pareillement question de chercher la valeur du côté* PZ *du triangle-Sphérique* sPZ, *dans lequel on connoîtroit le côté* Ps, *qui seroit le complément de la déclinaison du Soleil; le côté* ZFs, *qui seroit la somme du quart de cercle* Zf *& de la profondeur donnée* fs ¶; *avec l'angle* sPZ, *ou* dPE, *dont la mesure seroit la distance donnée* dE *du Soleil au Méridien.* * Fig. 164.

† Cette proportion a précisément les mêmes termes que la précédente; parce que le triangle DFS est celui qui est formé par les prolongements des côtés du triangle SPO. *Voyez le* N° 266.

¶ Si l'on proposoit, par exemple, de trouver la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu auquel le Soleil paroîtroit se lever à une certaine heure, le côté *Zfs* * seroit de 90 deg. 32 min. 20 sec. * Fig. 164.

SCHOLIE II.

392. *Comme nous venons de parler de la maniére de construire les Tables des Climats de demi-heure, nous allons donner ici celle de construire les Tables des Climats de mois; afin de ne point séparer ces deux Problêmes.*

Pour cet effet, nous remarquerons que lorsque la hauteur du Pôle sur l'horison est de plus de 66 deg. 31 min. 30 sec. il y a une partie de l'Ecliptique, qui dans la révolution journaliére de ce cercle ne passe point sous l'horison. Ainsi, pendant tout le temps que le Soleil est dans cette partie, qui est d'autant plus grande que le Pôle est élevé de plus de 66 deg. 31 min. 30 sec. il ne se couche point sous cet horison: & comme il emploie environ un jour à parcourir un degré de l'Ecliptique, & par conséquent 30 jours à en parcourir 30 deg. 60 jours à en parcourir 60, &c. la durée du plus long jour est d'un mois aux lieux où la partie de l'Ecliptique qui ne passe point sous l'horison, est de 30 deg. de deux mois aux lieux où cette partie est de 60 deg. & ainsi de suite. Cela supposé:

Si l'on dispose la Sphére de maniére que l'horison HAO ** & le Méridien* HZO *coupent l'Ecliptique* H♈O, *chacun en un même point* O *éloigné de 15 deg. du point du solstice d'Eté, l'arc de ce dernier cercle, qui se trouve compris entre ces deux points, est la moitié de la partie de ce même cercle qui ne passe jamais sous l'ho-*

* Fig. 169.

rison HAO *d'un lieu où la durée du plus long jour est d'un mois : & la partie* OQ *de ce Méridien, qui se trouve comprise entre ce même point* O *& l'Equateur* EQ, *est le complément de la hauteur* OP *du Pôle* P *sur ce même horison. Or, dans le triangle-Sphérique* ♈OQ *qui est rectangle en* Q; *on connoît l'angle* O♈Q *de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec. puisque cet angle est l'obliquité de l'Ecliptique* H♈O; *avec l'hypoténuse* ♈O *de* 75 *deg. puisque cette hypoténuse est une partie de l'Ecliptique, qui est comprise entre le point* ♈ *auquel ce cercle coupe l'Equateur, & un point* O *éloigné* [c] *de* 15 *deg. du point du solstice. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté* OQ *de ce triangle; c'est-à-dire, le complément de la hauteur demandée* OP. (a) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle O♈Q connu de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♈O trouvée de 75 deg. - - - - - - -	9.9849438
Logarithme du sinus du côté OQ - - - -	19.5852073

qui (b) donne 22 deg. 37 min. 47 sec. pour la valeur de ce côté; & par conséquent, 67 deg. 22 min. 13 sec. pour celle de la hauteur demandée OP. (b) N. 103.

Si l'on dispose ensuite la Sphère de manière que le point O * *auquel le Méridien, l'horison, & l'Ecliptique s'entrecoupent, soit éloigné de* 30 *deg. du point du solstice d'Eté, l'arc de l'Eclitique qui se trouve compris entre ces deux points, est de même que dans la disposition précédente, la moitié de la partie de ce dernier cercle qui ne passe jamais sous l'horison* HAO *d'un lieu où* * Fig. 169.

la durée du plus long jour est de deux mois : & la partie OQ *du Méridien* HZO *est aussi de même, le complément de la hauteur* OP *du Pôle* P *sur cette horison. Or, dans le triangle-Sphérique rectangle* ♈OQ, *on connoit l'angle* O♈Q *de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec. avec l'hypoténuse* ♈O *de* 60 *deg. Ainsi, l'on cherche ce complément* OQ, *& par conséquent cette hauteur* OP, *de la même maniére dont nous les avons trouvés dans la disposition précédente.*

Enfin, en disposant toujours ainsi la Sphére, * Fig. 169. *de maniére que le point* O * *soit éloigné du point du solstice d'Eté, de la moitié de la partie de l'Ecliptique qui ne passe point sous l'horison du lieu où la durée du plus long jour est du nombre de mois, de semaines, ou même de jours que l'on veut, on trouve toujours de la même maniére dont nous venons de le faire, la hauteur du Pôle sur l'horison de ce lieu. Ainsi, l'on peut connoitre quand on le veut, quelle doit être la hauteur du Pôle sur l'horison de chaque lieu où la différence de la durée du plus long jour à celle du plus long jour d'un autre lieu est d'un mois, ou d'une semaine, ou même d'un jour ; & par conséquent, construire des Tables des Climats de mois, des Climats de semaines, & même des Climats de jours, suivant qu'on le juge à propos.*

393. *Mais, si au lieu de demander quelle doit être la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu où la durée du plus long jour est de plusieurs jours, on propose au contraire de trouver la durée*

du

du plus long jour à un lieu où le Pôle est élevé de plus de 66 d. 31 m. 30 s. alors il faut chercher combien la partie de l'Ecliptique qui ne passe jamais sous l'horison de ce lieu, contient de degrés; & compter ensuite ces degrés pour autant de jours pendant lesquels le Soleil ne se couche point sous cet horison. Or, suivant ce que nous venons de dire, l'hypoténuse ♈O* du triangle-Sphérique ♈OQ qui est rectangle en Q, est toujours le complément de la moitié de cette partie. Donc, puisque le côté OQ de ce même triangle est aussi toujours le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée dans le cas dont il s'agit, & que l'angle O♈Q est constamment de 23 deg. 28 min. 30 sec. si l'on renverse la proportion par laquelle nous venons de connoître le côté OQ, on trouve le complément ♈O de la moitié de la partie de l'Ecliptique que l'on demande; & par conséquent, on connoît cette partie entiére, qui donne le nombre des jours pendant lesquels le Soleil ne se couche point sous l'horison du lieu proposé. * Fig. 169.

Ainsi, si l'on demande, par exemple, de combien est la durée du plus long jour, à un certain lieu ou le Pôle P est élevé de 70 deg. 23 min. on connoît dans le triangle-Sphérique rectangle ♈OQ, le côté OQ de 19 deg. 37 min. puisque ce côté est le complément de cette hauteur donnée; avec l'angle O♈Q de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est toujours l'obliquité de l'Ecliptique, laquelle est connue de cette grandeur. Ainsi, l'on cherche de la maniére sui-

(a) N. 264. vante (a), l'hypoténuse ♈O de ce triangle.

Complément du logar. du sinus de l'angle O♈Q connu de 23 d. 28 m. 30 s. - - - - - -	0.3997365
Logar. du sinus du côté OQ trouvé de 19 deg. 37 min. - - - - - - - - - - - - - -	9.5259844
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♈O - -	9.9257209

(b) N. 103. *qui (b) donne 57 deg. 26 min. 10 sec. pour la valeur de cette hypoténuse ; & par conséquent, 32 deg. 33 min. 50 sec. pour celle de la moitié de la partie de l'Ecliptique qui ne passe jamais sous l'horison du lieu proposé. Or, puisque la moitié de cette partie est de 32 deg. 33 min. 50 sec. cette partie entière est de 65 deg. 7 min. 40 sec. qui donnent 2 mois 5 jours 3 heures 34 min. pour la durée du plus long jour, à tous les lieux où le Pôle est élevé de 70 deg. 23 min.*

XIV. USAGE.

394. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec la distance du Soleil au Méridien de ce lieu, trouver 1^ent, l'arc de l'horison qui est compris entre le cercle horaire & ce Méridien : 2^ent, l'angle que l'horison forme avec ce cercle horaire : 3^ent enfin, l'arc de ce même cercle horaire, qui est compris entre le Pôle & l'horison.*

* Fig. 170. On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'angle horaire IPE, ou la distance DE du Soleil au Méridien, de 105 deg. & il faut trouver 1^ent, l'arc IO de l'horison, qui est compris entre le cercle horaire PI*p* & le Méridien HZO : 2^ent, l'angle PIO que l'horison forme avec ce cercle horaire : 3^ent enfin, l'arc PI de ce même cercle horaire, qui est compris entre le Pôle P & le même horison HO.

Solution. Dans le triangle-Sphérique IPO qui est rectangle en O, on connoît le côté OP de 48 deg. 50 min. 10 sec. puisque ce côté est donné de cette grandeur; avec l'angle IPO de 75 deg. puisque cet angle est le supplément de l'angle IPE qui est donné de 105 deg. Ainsi, l'on cherche 1ent de la maniére suivante (*a*), le côté IO. (*a*) N. 278.

Logarithme du sinus du côté OP *donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec.* - - - - -	9.8766969
Logarithme de la tangente de l'angle IPO *trouvé de* 75 *deg.* - - - - - - - - - - -	10.5719475
Logar. de la tangente du côté demandé IO - -	20.4486444
	1

qui (*b*) donne 70 deg. 24 min. 30 sec. pour la valeur de ce côté. (*b*) N. 103.

2ent de la maniére suivante (*c*), l'angle PIO. (*c*) N. 274.

Logar. du sinus de l'angle IPO *trouvé de* 75 *deg.*	9.9849438
Logarithme du sinus du complément du côté OP *donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec.* - - - -	9.8183678
Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé PIO - - - - - -	19.8033116

qui (*d*) donne 39 deg. 28 min. 42 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 50 deg. 31 min. 18 sec. *p. m.* pour celle de cet angle. (*d*) N. 103.

Ou de la maniére suivante (*e*). (*e*) N. 289.

Complément du logarithme du sinus du côté IO *trouvé de* 70 *deg.* 24 *min.* 30 *sec.* - - - -	0.0259001
Logarithme du sinus du côté OP *donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec.* - - - - - - - - - -	9.8766969
Logar. du sinus de l'angle IPO *trouvé de* 75 *deg.*	9.9849438
Logar. du sinus de l'angle demandé PIO - - -	19.8875408

qui (*f*) donne de même 50 deg. 31 min. 18 sec. *p. m.* pour la valeur de cet angle. (*f*) N. 103.

(a) N. 285. 3[ent] enfin, de la maniére ſuivante (a), l'arc PI.

Logarithme du ſinus du complément de l'angle IPO *trouvé de* 75 *deg.* - - - - - - - - - - -	9.4129962
Logarithme de la tangente du complément du côté OP *donné de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *ſec.* - - -	9.9416710
Logarithme de la tang. du complément de l'hypoténuſe PI - - - - - - - - - - - - - - -	19.3546672

(b) N. 103. qui (b) donne 13 deg. 4 min. 43 ſec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conſéquent, 76 d. 55 m. 17 ſ. pour celle de cette hypoténuſe, c'eſt-à-dire, pour celle de l'arc demandé.

SCHOLIE.

395. *La premiére partie de cet Uſage eſt très-utile dans la Gnomonique, pour tracer les Cadrans horiſontaux; parce qu'en cherchant de la maniére dont nous venons de le faire, les arcs de l'horiſon qui ſont compris entre le Méridien & les cercles horaires, on a les angles que les lignes horaires forment avec la Méridienne, ſur le plan du Cadran. Et comme un Cadran horiſontal eſt un Cadran vertical pour un lieu dont il eſt éloigné de* 90 *deg. on peut ſe ſervir du même Uſage pour tracer les Cadrans verticaux, en changeant dans le calcul, la hauteur du Pôle en ſon complément.*

XV. USAGE.

396. *Connoiſſant la hauteur du Pôle ſur l'horiſon d'un certain lieu, le lieu du Soleil, avec l'obliquité de l'Ecliptique, trouver* 1[ent], *le point de ce dernier cercle qui ſe leve à un temps donné:*

2ent, *l'angle que ce même dernier cercle forme à cet instant avec cet horison.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. le lieu du Soleil à 10 heures du matin, au 10me deg. du ♌ : avec l'obliquité D♎S, ou I♎F, de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver 1ent, le point I de ce dernier cercle qui se leve à cet instant : 2ent, l'angle ♎IH que ce même dernier cercle forme à ce même instant, avec cet horison. * Fig. 171.

Solution. Cherchez de la maniére suivante (*a*), l'ascension droite ♈ED du 10me deg. du ♌ ; ou seulement l'arc D♎. (*a*) N. 342.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle D♎S *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.*	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse ♎S *trouvée de* 50 *deg.* - - - -	9.9238135
Logar. de la tang. du complément du côté D♎ -	9.9613334

qui (*b*) donne 42 deg. 27 min. 10 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 47 deg. 32 min. 50 sec. pour celle de ce côté. (*b*) N. 103.

Par ce moyen, on connoît dans le triangle Sphérique obliquangle I♎F, le côté ♎F de 12 d. 27 min. 10 sec. puisque ce côté est le complément de la somme ED♎ de cet arc D♎ que l'on vient de trouver, & de la distance ED du Soleil au Méridien, laquelle est donnée de 2 heures, & par conséquent de 30 deg. Or, on connoît aussi dans le même triangle, l'angle I♎F de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec

l'angle ♎FI, ou EFH, de 41 deg. 9 min. 50 sec.
(a) N. 196. puisque (*a*) ce dernier angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur ; & par conséquent, le complément de la hauteur OP du Pôle P, laquelle est aussi donnée de 48 deg. 50 min.
(b) N. 297. 10 sec. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc ♎M d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle ♎ perpendiculairement au côté FI, (prolongé vers M, parce que les angles ♎IF, & ♎FI, sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté demandé ♎I, & l'angle demandé ♎IH.

1ent Dans le triangle-Sphérique M♎F qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse ♎F que l'on vient de trouver de 12 deg. 27 min. 10 sec. avec l'angle ♎FM, ou ♎FI, que l'on vient aussi de trouver de 41 deg. 9 min. 50 sec.
(c) N. 283. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), l'angle F♎M.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ♎F trouvée de 12 deg. 27 min. 10 sec. - - - - - - -	0.0103393
Logarithme de la tangente du complément de l'angle ♎FM trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. -	10.0583290
Logar. de la tang. de l'angle F♎M - - - - -	10.0686683

(d) N. 103. qui (*d*) donne 49 deg. 30 min. 39 sec. *p. m.* pour la valeur de cet angle ; duquel ayant retranché l'angle I♎F, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 26 deg. 2 min. 9 sec. pour la valeur de l'angle I♎M.

2ent Dans le triangle-Sphérique obliquangle I♎F, on connoît l'angle au sommet F♎M que l'on vient de trouver de 49 deg. 30 min. 39 sec.

l'autre angle au sommet I♎M que l'on vient aussi de trouver de 26 deg. 2 min. 9 sec. & le côté ♎F que l'on a trouvé de 12 deg. 27 m. 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), l'autre côté ♎I. (*a*) N. 305.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle F♎M *trouvé de* 49 *deg.* 30 *min.* 39 *s.*	0.1875518
Logarithme du sinus du complément de l'angle I♎M *trouvé de* 26 *deg.* 2 *min.* 9 *sec.* - -	9.9535276
Logarithme de la tangente au complément du côté ♎F *trouvé de* 12 *deg.* 27 *min.* 10 *sec.* - -	10.6559417
Logar. de la tangente du complément du côté ♎I	20.7970211
	1

qui (*b*) donne 80 deg. 55 min. 59 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 9 deg. 4 min. 1 sec. pour celle de ce côté. Or, puisque l'arc ♎I est de 9 deg. 4 min. 1 sec. le point I de l Ecliptique qui se leve sur l'horison à l'instant demandé, est le 9me deg. 4 min. 1 sec. de ♎. (*b*) N. 103.

3ent enfin, dans le triangle-Sphérique M♎I qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse ♎I que l'on vient de trouver de 9 deg. 4 min. 1 sec. avec l'angle I♎M que l'on a trouvé de 26 deg. 2 min. 9 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), l'autre angle ♎IM. (*c*) N. 283.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse ♎I *trouvée de* 9 *deg.* 4 *min.* 1 *sec.*	0.0054608
Logar. de la tangente du complément de l'angle I♎M *trouvé de* 26 *deg.* 2 *min.* 9 *sec.* - - - - -	10.3111292
Logarithme de la tangente de l'angle ♎IM - - -	10.3165900

qui (*d*) donne 64 deg. 14 min. 50 *p. m.* pour la valeur de cet angle, lequel est le même que l'angle demandé ♎IH. (*d*) N. 103.

SCHOLIE I.

397. *Dans l'exemple que nous venons de*
* Fig. 171. *donner, l'interſection* ♎ * *de l'Ecliptique & de l'Equateur ſe trouve ſur l'horiſon. Mais, ſi l'on en propoſoit un dans lequel cette même interſection ſe trouveroit ſous ce cercle* † ; *alors pour*
* Fig. 172. *connoître le côté* ♎F * *du triangle-Sphérique obliquangle* I♎F, *il faudroit retrancher du ſupplément* D♎ *de l'aſcenſion droite* ♈ED *du Soleil, le complément* DF *de la diſtance* ED *de cet Aſtre au Méridien ; & l'on trouveroit enſuite le côté* ♎I *de ce triangle, avec l'angle* ♎IM, *ou* SIH, *de la même maniére dont nous venons de le faire dans cet Uſage.*

SCHOLIE II.

* Fig. 171. & 172. 398. *Si en commençant au point* I * *de l'Ecliptique, qui eſt à l'horiſon, & en montant vers le Zénith, on compte ſur ce cercle* 90 *deg. & ſi l'on fait enſuite paſſer un cercle vertical par ce* 90[me] *deg. l'arc de ce vertical, qui ſe trouve compris entre ce même* 90[me] *deg. & l'horiſon,*
(a) N. 242. ou 196. *eſt (a) la meſure de l'angle* SIH *que l'Ecliptique forme avec ce dernier cercle. Par conſé-*

† On connoît le point de l'Equateur qui eſt au Méridien ; & par conſéquent, dans lequel de l'hémiſphere ſupérieur ou de l'hémiſphere inférieur, chaque interſection de l'Equateur & de l'Ecliptique eſt ſituée, en ajoûtant l'angle horaire à l'Aſcenſion droite du Soleil, ou en l'en retranchant, ſuivant les différents cas qu'il eſt facile de voir ſur la Sphére.

quent,

quent, on trouve la hauteur du 90*me deg. de l'Ecliptique, en cherchant comme nous venons de le faire dans cet Usage, l'angle* SIH *que ce cercle forme avec l'horison.*

XVI. USAGE.

399. *Trouver l'ascension droite d'une Etoile quelconque.*

Solution. Observez (*a*) la hauteur méridienne du Soleil; d'où vous déduirez (*b*) sa déclinaison, son lieu dans l'Ecliptique †, & son ascension droite. La nuit suivante, observez par le moyen d'une Pendule à secondes que vous aurez réglée sur le vrai mouvement du Soleil, l'instant auquel l'Etoile proposée passera par le Méridien. Réduisez en degrés de l'Equateur le temps qui se sera écoulé depuis le midi précedent, jusqu'à cet instant. Enfin, ajoûtez ces degrés à l'ascension droite du Soleil que vous aurez trouvée pour ce midi précedent; & la somme, ou ce qui restera de cette somme après en avoir retranché 360 deg. lorsqu'elle surpassera ce nombre, sera l'ascension droite demandée.

(*a*) N. 327.
(*b*) N. 333. 341. & 342.

SCHOLIE I.

400. *Lorsque l'on connoîtra l'ascension droite d'une Etoile, on trouvera celle de telle autre Etoile*

† On peut ne se point donner la peine d'observer la hauteur méridienne du Soleil; & chercher son lieu dans l'Ecliptique par le moyen des Tables de M. De Cassini.

que l'on voudra, en observant la différence des passages de ces deux Etoiles par le Méridien; & en ajoûtant ensuite cette différence réduite en degrés, à l'ascension droite de la première, ou en l'en retranchant, suivant la position de l'Etoile proposée, à l'occident ou à l'orient de cette même première Etoile.

SCHOLIE II.

401. *Il faut observer avec beaucoup de précision le temps qui s'écoule entre les passages du Soleil & des Etoiles par le Méridien; parce qu'une erreur de 4 secondes d'heure dans ce temps, en causeroit une d'une minute de degré dans les ascensions droites de ces Etoiles.*

SCHOLIE III.

402. *Lorsque l'on connoît l'ascension droite du Soleil, avec celle d'une Etoile quelconque, on trouve facilement l'instant de la* Culminaison *de cette Etoile; c'est-à-dire, l'instant auquel elle passe par le Méridien; puisque la différence qui se trouve entre ces ascensions étant réduite en temps, donne la différence de l'instant du passage du Soleil par le Méridien à l'instant du passage de l'Etoile proposée par le même Méridien.*

Ainsi, si l'on veut connoître, par exemple, l'heure à laquelle Regulus *a passé par le Méridien de Paris, le 10. du mois de Mai de l'année 1749. on retranche de l'ascension droite de cette Etoile, qui ce jour-là, étoit de 148 deg.*

44 *min.* 30 *sec. l'ascension droite du Soleil, qui ce même jour étoit de* 57 *deg.* 15 *m.* 12 *s. & après avoir réduit en temps la différence* 91 *d.* 29 *min.* 18 *sec. de ces deux ascensions, on a* 6 *heures* 5 *min.* 56 *sec. du soir, pour l'instant de la Culminaison de* Regulus, *au jour proposé.*

Mais, si l'on demandoit l'heure à laquelle l'Etoile pôlaire a passé ce même jour par le même Méridien, alors comme l'ascension droite de cette Etoile, qui le jour proposé étoit de 10 *deg.* 37 *m.* 17 *s. seroit plus petite que celle du Soleil, qui le même jour étoit de* 57 *d.* 15 *m.* 12 *s. on retrancheroit la première de la dernière; & apres avoir réduit en temps la différence* 46 *deg.* 37 *min.* 55 *sec. de ces deux ascensions, on auroit* 3 *heures* 6 *min.* 31 *sec. avant midi, & par conséquent,* 8 *heures* 53 *min.* 29 *sec. du matin, pour l'instant de la Culminaison de cette autre Etoile, le* 20. *du mois de Mai de l'année* 1749.

XVII. Usage.

403. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite, & la déclinaison d'une Etoile, trouver la latitude †, & la longitude ¶ de cette Etoile.*

† On appelle *Latitude* d'un Astre, la distance du centre de cet Astre à l'Ecliptique. On la divise en septentrionale & en méridionale; & elle se mesure sur la circonférence du *cercle de latitude* de cet Astre; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Ecliptique, & passe par le centre de ce même Astre.

† On appelle *Longitude* d'un Astre, l'arc de l'Ecliptique qui est compris entre le premier point du ♈ & le cercle de latitude de cet Astre. On la compte en suivant l'ordre des Signes.

que l'on voudra, en observant la différence des passages de ces deux Etoiles par le Méridien; & en ajoûtant ensuite cette différence réduite en degrés, à l'ascension droite de la premiére, ou en l'en retranchant, suivant la position de l'Etoile proposée, à l'occident ou à l'orient de cette même premiére Etoile.

SCHOLIE II.

401. *Il faut observer avec beaucoup de précision le temps qui s'écoule entre les passages du Soleil & des Etoiles par le Méridien; parce qu'une erreur de 4 secondes d'heure dans ce temps, en causeroit une d'une minute de degré dans les ascensions droites de ces Etoiles.*

SCHOLIE III.

402. *Lorsque l'on connoît l'ascension droite du Soleil, avec celle d'une Etoile quelconque, on trouve facilement l'instant de la* Culminaison *de cette Etoile; c'est-à-dire, l'instant auquel elle passe par le Méridien; puisque la différence qui se trouve entre ces ascensions étant réduite en temps, donne la différence de l'instant du passage du Soleil par le Méridien à l'instant du passage de l'Etoile proposée par le même Méridien.*

Ainsi, si l'on veut connoître, par exemple, l'heure à laquelle Regulus *a passé par le Méridien de Paris, le 20. du mois de Mai de l'année 1749. on retranche de l'ascension droite de cette Etoile, qui ce jour-là, étoit de 148 deg.*

44 min. 30 sec. l'ascension droite du Soleil, qui ce même jour étoit de 57 deg. 15 m. 12 s. & après avoir réduit en temps la difference 91 d. 29 min. 18 sec. de ces deux ascensions, on a 6 heures 5 min. 56 sec. du soir, pour l'instant de la Culminaison de Regulus, au jour proposé.

Mais, si l'on demandoit l'heure à laquelle l'Etoile pôlaire a passé ce même jour par le même Méridien, alors comme l'ascension droite de cette Etoile, qui le jour proposé étoit de 10 deg. 37 m. 17 s. seroit plus petite que celle du Soleil, qui le même jour étoit de 57 d. 15 m. 12 s. on retrancheroit la première de la derniére; & apres avoir réduit en temps la différence 46 deg. 37 min. 55 sec. de ces deux ascensions, on auroit 3 heures 6 min. 31 sec. avant midi, & par conséquent, 8 heures 53 min. 29 sec. du matin, pour l'instant de la Culminaison de cette autre Etoile, le 20. du mois de Mai de l'année 1749.

XVII. Usage.

403. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite, & la déclinaison d'une Etoile, trouver la latitude †, & la longitude ¶ de cette Etoile.*

† On appelle *Latitude* d'un Astre, la distance du centre de cet Astre à l'Ecliptique. On la divise en septentrionale & en méridionale; & elle se mesure sur la circonférence du *cercle de latitude* de cet Astre; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Ecliptique, & passe par le centre de ce même Astre.

† On appelle *Longitude* d'un Astre, l'arc de l'Ecliptique qui est compris entre le premier point du ♈ & le cercle de latitude de cet Astre. On la compte en suivant l'ordre des Signes.

L'Etoile dont on veut connoître la latitude & la longitude, peut être située dans l'Equateur, ou hors de l'Equateur; ainsi cet Usage a deux cas.

PREMIER CAS.

Lorsqu'il s'agit d'une Etoile située dans l'Equateur.

* Fig. 173. 404. On donne l'obliquité S♈D de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite ♈S d'une Etoile S située dans l'Equateur EQ, de 53 deg. 17 min. & il faut trouver la latitude SD de cette Etoile, & sa longitude ♈D.

Solution. Si l'on suppose un cercle de latitude IDS tiré du Pôle I de l'Ecliptique par le centre S de l'Etoile proposée, on a un triangle-Sphérique ♈DS qui est rectangle en D; & dans lequel on connoît l'angle S♈D, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse ♈S, qui est aussi donnée de 53 deg. 17 min. Ainsi, (a) N. 163. l'on cherche 1ent, de la maniére suivante (*a*), la latitude SD.

Logar. du sinus de l'angle S♈D *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.* - - - -	9.6002635
Logar. du sinus de l'hypoténuse ♈S *donnée de* 53 *d.* 17 *min.* - - - - - -	9.9039587
Logar. du sinus de la latitude demandée SD - -	19.5042222

(b) N. 103. qui (*b*) donne 18 deg. 37 min. 18 sec. *p. m.* pour la valeur de cette latitude.

2ent, de la maniére suivante (a), la longitude ♈D. (a) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle S♈D donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. 0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse ♈S donnée de 53 deg. 17 min. - - - 9.8726396

Logar. de la tangente du complément de la longitude demandée ♈D - - - - - - - - - - - 9.9101595

qui (b) donne 39 deg. 6 min. 56 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 50 deg. 53 min. 4 sec. pour celle de cette longitude. (b) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

405. *On donne l'obliquité* B♎C * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite* ♈QB *d'une Etoile* B *située dans l'Equateur* EQ, *de 128 deg. 49 min. & il faut trouver la latitude* BC *de cette Etoile, & sa longitude* ♈♋C. * Fig. 173.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♎CB qui est rectangle en C, on connoît l'angle B♎C de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur; avec l'hypoténuse B♎ de 51 deg. 11 min. puisque cette hypoténuse est le supplément de l'ascension droite ♈QB, qui est donnée de 128 deg. 49 min. Ainsi, l'on cherche 1ent de la maniére suivante (c), la latitude BC. (c) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle B♎C *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - 9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse B♎ *trouvée de 51 deg. 11 min.* - - - - - 9.8916242

Logar. du sinus de la latitude demandée BC - - 19.4918877

qui (d) donne 18 deg. 4 min. 54 sec. *p. m.* pour la valeur de cette latitude. (d) N. 103.

(a) N. 284. 2ent, de la maniére ſuivante (a), la longitude ♈♋C.

Complément du logarithme du ſinus du complément de l'angle B♎C donné de 23 deg. 28 min. 30 ſ. 0.0375199
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuſe B♎ trouvée de 51 deg. 11 min. - - - - 9.9055259

Logar. de la tangente du complément du côté C♎ - 9.9430458

(b) N. 103. qui (b) donne 41 deg. 15 min. 14 ſec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conſéquent, 48 deg. 44 min. 46 ſec. pour celle de ce côté ; laquelle étant retranchée de la demi-circonférence ♈♋♎, laiſſera 131 deg. 15 min. 14 ſec. pour la longitude demandée ♈♋C.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 173. 406. *On donne l'obliquité* F♎G * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 ſec. avec l'aſcenſion droite* ♈Q♎F *d'une Etoile* F *ſituée dans l'Equateur* EQ, *de 213 deg. 27 min. & il faut trouver la latitude* FG *de cette Etoile, & ſa longitude* ♈♋♎G.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♎FG qui eſt rectangle en G, on connoît l'angle F♎G de 23 deg. 28 min. 30 ſec. puiſque cet angle eſt donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuſe ♎F de 33 deg. 27 min. puiſque cette hypoténuſe eſt l'excès de l'aſcenſion droite ♈Q♎F, qui eſt donnée de 213 deg. 27 min. ſur la demi-circonférence ♈Q♎ de l'Equateur EQ. Ainſi, l'on cherche 1ent, de la maniére ſuivante (c), la latitude FG.

(c) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle F♎G *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♎F *trouvée de 33 deg. 27 min.* - - - - - - - - - -	9.7413164
Logar. du sinus de la latitude demandée FG -	19.341,799

(*a*) N. 103. qui (*a*) donne 12 deg. 41 min. 2 sec. *p. p.* pour la valeur de cette latitude.

2^ent^, de la maniére suivante (*b*), la longitude ♈♋♎G. (*b*) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle F♎G *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *s.*	0.0375197
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse ♎F *trouvée de* 33 *deg.* 27 *min.* - -	10.1800408
Logarithme de la tang. du complément du côté ♎G	10.2175609

qui (*c*) donne 58 deg. 47 min. 10 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 31 deg. 12 min. 50 sec. pour celle de ce côté ; laquelle étant ajoûtée a la demi-circonférence ♈♋♎, donnera 211 deg. 12 min. 50 sec. pour la longitude demandée ♈♋♎G. (*c*) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

407. *Enfin, on donne l'obliquité* H♈K * *de l'Ecliptique, de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec. avec l'ascension droite* ♈Q♎EH *d'une Etoile* H *située dans l'Equateur* EQ *de* 291 *deg.* 48 *min. & il faut trouver la latitude* HK *de cette Etoile, & sa longitude* ♈♋♎♑K. * Fig. 173.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♈HK qui est rectangle en K, on connoît l'angle H♈K de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse H♈ de 68 deg. 12 min. puisque cette hypoténuse est la différence de l'ascension droite

(a) N. 284. 2ent, de la maniére suivante (a), la longitude ♈♋C.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle B♎C donné de 23 deg. 28 min. 30 s. 0.0375199
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse B♎ trouvée de 51 deg. 11 min. - - - - 9.9055259

Logar. de la tangente du complément du côté C♎ - 9.9430458

(b) N. 103. qui (b) donne 41 deg. 15 min. 14 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 48 deg. 44 min. 46 sec. pour celle de ce côté ; laque le étant retranchée de la demi-circonférence ♈♋♎, laissera 131 deg. 15 min. 14 sec. pour la longitude demandée ♈♋C.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 173. 406. *On donne l'obliquité* F♎G * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite* ♈Q♎F *d'une Etoile* F *située dans l'Equateur* EQ, *de 213 deg. 27 min. & il faut trouver la latitude* FG *de cette Etoile, & sa longitude* ♈♋♎G.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♎FG qui est rectangle en G, on connoît l'angle F♎G de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse ♎F de 33 deg. 27 min. puisque cette hypoténuse est l'excès de l'ascension droite ♈Q♎F, qui est donnée de 213 deg. 27 min. sur la demi-circonférence ♈Q♎ de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on cherche 1ent, de la maniére sui-

(c) N. 263. vante (c), la latitude FG.

Logarithme du sinus de l'angle F♎G *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse ♎F *trouvée de 33 deg. 27 min.* - - - - - - - - - -	9.7413164
Logar. du sinus de la latitude demandée FG -	19.341,799

(a) N. 103.

qui (a) donne 12 deg. 41 min. 2 sec. *p. p.* pour la valeur de cette latitude.

2ent, de la maniére suivante (b), la longitude ♈♋♎G. (b) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle F♎G *donné de 23 deg. 28 min. 30 s.*	0.0375197
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse ♎F *trouvée de 33 deg. 27 min.* - -	10.1800408
Logarithme de la tang. du complément du côté ♎G	10.2175609

qui (c) donne 58 deg. 47 min. 10 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 31 deg. 12 min. 50 sec. pour celle de ce côté ; laquelle étant ajoûtée a la demi-circonférence ♈♋♎ , donnera 211 deg. 12 min. 50 sec. pour la longitude demandée ♈♋♎G. (c) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

407. *Enfin, on donne l'obliquité* H♈K * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite* ♈Q♎EH *d'une Etoile* H *située dans l'Equateur* EQ *de 291 deg. 48 min. & il faut trouver la latitude* HK *de cette Etoile, & sa longitude* ♈♋♎♑K. * Fig. 173.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ♈HK qui est rectangle en K, on connoît l'angle H♈K de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse H♈ de 68 deg. 12 min. puisque cette hypoténuse est la différence de l'ascension droite

♈Q♎EH, qui est donnée de 291 deg. 48 min. á la circonférence entiére de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on cherche 1^ent, de la maniére suivante (a), la latitude HK.

(a) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle H♈K *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - - - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse H♈ *trouvée de 68 deg. 12 min.* - - - - - - - - - -	9.9677755
Logarithme du sinus de la latitude demandée HK -	19.5680388

(b) N. 103. qui (b) donne 21 deg. 41 min. 25 sec. *p. p.* pour la valeur de cette latitude.

(c) N. 284. 2^ent, de la maniére suivante (c), la longitude ♈♋♎♑K.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle H♈K *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.*	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse H♈ *trouvée de 68 deg. 12 min.* - -	9.6020290
Logar. de la tangente du complément du côté K♈	9.6395489

qui (d) donne 23 deg. 33 min. 37 sec. *p. m.* pour la valeur de
(d) N. 103. ce complément; & par conséquent, 66 deg. 26 min. 23 sec. pour celle de ce côté; laquelle étant retranchée de la circonférence entiére de l'Ecliptique ♋♑, laissera 293 deg. 33 min. 37 sec. pour la longitude demandée ♈♋♎♑K.

SECOND CAS.

Lorsqu'il s'agit d'une Etoile située hors de l'Equateur.

* Fig. 174. 408. *On donne l'obliquité* Q♈♋ * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite* ♈D *de la Ceinture d'*Andromede *marquée* ε *dans* Bayer, *de* 10 *deg.* 55 *min* 55 *sec.*

avec

être sa déclinaison Dc, *de* 34 *deg.* 17 *min.* 3 *sec. vers le septentrion* †. *& il faut trouver la latitude* Bc *de cette Etoile, & sa longitude* ♈B.

Solution. Le cercle de latitude BcI de l'Etoile proposée, son cercle de déclinaison DcP, avec autre cercle ♑P♋ que l'on suppose être tiré du Pôle P de l'Equateur, par le Pôle I de l'Ecliptique, & par conséquent, par les points ♑ & ♋ des solstices, forment en s'entrecoupant un triangle-Sphérique obliquangle cIP, dans lequel on connoît le côté IP de 23 d. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté cP de 55 deg. 42 min. 57 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dc, laquelle est donnée de 34 deg. 17 m. 3 sec. avec l'angle cPI, ou DPE, de 100 deg. 55 min. 55 sec. puisque (*a*), cet angle a pour mesure la somme E♈D de l'ascension droite ♈D, laquelle est aussi donnée de 10 deg. 55 m. 55 sec. & du quart E♈ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté cP, (prolongé vers M, parce que les angles IPc & IcP sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté cI, & l'angle cIP.

(*a*) N. 196.

(*b*) N. 197.

† Cette ascension droite & cette déclinaison sont prises pour le commencement de l'année 1749. & il en est de même de celles que nous proposerons dans la suite.

1ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle IPM de 79 deg. 4 min. 5 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle CPI que l'on vient de trouver de 100 deg. 55 min. 55 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), le segment PM.

(a) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle IPM *trouvé de* 79 *deg.* 4 *min.* 5 *sec.* -	0.7220635
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP *donnée de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.* -	10.3622166
Logar. de la tangente du complément du segment PM	11.0842801

(b) N. 103. qui (b) donne 85 deg. 17 min. 30 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 4 deg. 42 min. 30 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant ajoûtée au côté CP que l'on a trouvé de 55 deg. 42 min. 57 sec. donne 60 deg. 25 min. 27 sec. pour la valeur du segment CPM †.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle CIP, on connoît le segment PM que l'on vient de trouver de 4 deg. 42 min. 30 sec. le segment CPM que l'on vient aussi de trouver de 60 deg. 25 min. 27 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.

* Fig. 174. † Il faut remarquer que si le segment CPM * se trouvoit de plus de 90 degrés, la latitude de l'Etoile proposée seroit méridionale. Car, puisque le côté IM du triangle-Sphérique rectangle MIC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que le côté CPM vaudroit alors plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse CI vaudroit aussi (c) plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

(c) N. 236.

Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le côté ♋I qui est le complément de la latitude demandée B♋. (*a*) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment PM *trouvé de* 4 *deg.* 42 *min.* 30 *sec.*	0.0014680
Logarithme du sinus du complément du segment ♋PM *trouvé de* 60 *deg.* 25 *min.* 27 *sec.* - -	9.6933532
Logarithme du sinus du complément du côté IP *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.* - - - - - - -	9.9624801
Logar. du sinus du complément du côté ♋I - -	19.6573013

qui (*b*) donne 27 deg. 1 min. 2 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée B♋, puisque cette latitude est ce complément même. (*b*) N. 103.

3^ent^ enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ♋IP, on connoît le côté ♋I de 62 deg. 58 min. 58 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B♋ que l'on vient de trouver de 27 deg. 1 min. 2 sec. le côté ♋P que l'on a trouvé de 55 deg. 42 min. 57 sec. avec l'angle ♋PI que l'on a aussi trouvé de 100 deg. 55 min. 55 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), l'angle ♋IP. (*c*) N. 289.

Complément du logarithme du sinus du côté ♋I *trouvé de* 62 *deg.* 58 *min.* 58 *sec.* - - - -	0.0501857
Logarithme du sinus du côté ♋P *trouvé de* 55 *deg.* 42 *min.* 57 *sec.* - - - - - - - - - -	9.9171136
Logarithme du sinus de l'angle ♋PI *trouvé de* 100 *d.* 55 *min.* 55 *sec.* - - - - - -	9.9920465
Logarithme du sinus de l'angle ♋IP - - - -	19.9593458

qui (*d*) donne 65 deg. 35 min. 37 sec. pour la valeur de cet angle; & par conséquent, pour celle de l'arc B♋ qui (*e*) en est la mesure. Mais cet arc est le complément de la longitude demandée ♈B. Donc cette longitude est de 24 deg. 24 min. 23 sec. & par conséquent, le point B est le 24me d. 24 m. 23 s. du ♈. (*d*) N. 103. (*e*) N. 196.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 175. 409. *On donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈QD du cœur du ♌ (Regulus) marqué α dans Bayer, de 148 deg. 44 min. 30 sec. avec sa déclinaison Dα de 13 deg. 11 m. 16 s. vers le septentrion; & il faut trouver la latitude Bα de cette Etoile, & sa longitude ♈♋B.*

* Fig. 174. *Solution.* Dans le triangle-Sphérique obliquangle αIP formé par des cercles pareils à ceux qui forment le triangle cIP * de l'exemple précedent, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté αP de 76 deg. 48 min. 44 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dα qui est donnée de 13 deg 11 min. 16 s. avec l'angle αPI, ou DPE, de 121 deg. 15 m.

(a) N. 196. 30 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la différence D♎E de l'ascension droite ♎QD, qui est donnée de 148 deg 44 min. 30 sec. aux trois quarts ♈Q♎E de la circonférence de

(b) N. 197. l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté αP, (prolongé vers M, parce que les angles IPα & IαP sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté αI, & l'angle αIP.

1ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle IPM de 58 deg. 44 min. 30 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle ♈PI que l'on vient de trouver de 121 deg. 15 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), le segment PM. (a) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle IPM trouvé de 58 deg. 44 min. 30 sec. - - - - - - -	9.2849184
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. -	10.3622166
Logarithme de la tangente du complément du segment PM - - - - - -	10.6471350

qui (b) donne 77 deg. 18 min. 1 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 12 deg. 41 min. 59 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant ajoûtée au côté ♈P que l'on a trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec. donne 89 deg. 30 min. 43 sec. pour la valeur du segment ♈PM. (b) N. 104.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle ♈IP, on connoît le segment PM que l'on vient de trouver de 12 d. 41 m. 59 s. le segment ♈PM que l'on vient aussi de trouver de 89 deg. 30 m. 43 s. avec le côté IP qui est donné de 23 d. 28 m. 30 s. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), le côté ♈I qui est le complément de la latitude demandée B♈. (c) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment PM trouvé de 12 deg. 41 min. 59 sec.	0.0107568
Logarithme du sinus du complément du segment ♋*PM trouvé de 89 deg. 30 min. 43 sec.* - - - -	7.9302905
Logarithme du sinus du complément du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - -	9.9624801
Logarithme du sinus du complément du côté ♋*I* - -	17.9035274

(a) N. 103. qui (a) donne 0 deg. 27 min. 32 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la latitude demandé B♋, puisque cette latitude est ce complément même.

3ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ♋IP, on connoît le côté ♋I de 89 deg. 32 min. 28 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B♋ que l'on vient de trouver de 27 min. 32 sec. le côté ♋P que l'on a trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec. avec l'angle ♋PI que l'on a aussi trouvé de 121 deg. 15 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma-
(b) N. 289. niére suivante (b), l'angle ♋IP.

Complément du logarithme du sinus du côté ♋*I trouvé de 89 deg. 32 min. 28 sec.* - - - - -	0.0000140
Logarithme du sinus du côté ♋*P trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec.* - - - - - -	9.9883929
Logarithme du sinus de l'angle ♋*PI trouvé de 121 d. 15 min. 30 sec.* - - - - - -	9.9318830
Logarithme du sinus de l'angle ♋*IP* - - - - -	19.9202899

(c) N. 103. qui (c) donne 56 deg. 20 min. 16 sec. *p. m.* pour la valeur de
(d) N. 196. cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'arc ♋B qui (d) en est la mesure. Or, puisque l'arc ♋B est de 56 deg 20 min. 16 sec. l'arc ♈♋B qui est la longitude demandée, est de 146 d. 20 min. 16 sec. & par conséquent, le point B est le 26me deg. 20 min. 16 sec. du ♌.

AUTRE EXEMPLE.

410. *On donne l'obliquité Q♈♋* * *de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈Q♎D de l'Aîle de la Vierge marquée* ⸰ *dans* Bayer, *de 192 deg. 25 min. 48 sec. avec sa déclinaison* D⸰ *de 12 deg. 18 min. 13 sec. vers le septentrion; & il faut trouver la latitude* B⸰ *de cette Etoile, & sa longitude ♈♋♎B.* * Fig. 176.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ⸰IP formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des deux exemples précedents, on connoît le côté IP de 23 d. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté ⸰P de 77 deg. 41 min. 47 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D⸰ qui est donnée de 12 deg. 18 min. 13 sec. avec l'angle ⸰PI, ou DPE, de 77 deg. 34 min. 12 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure la différence DE de l'ascension droite ♈Q♎D, laquelle est donnée de 192 deg. 25 m. 48 sec. aux trois quarts ♈Q♎E de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ⸰P, (qu'il rencontrera en un point M, parce que les angles I⸰P, & IP⸰ sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante le côté ⸰I, & l'angle ⸰IP. (a) N. 196. (b) N. 297.

1ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur ; avec l'angle IPM, ou •PI, que l'on vient de trouver de 77 deg. 34 min. 12 sec. Ainsi, l'on (a) N. 284. cherche de la maniére suivante (a) le segment MP.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle IPM *trouvé de* 77 *deg.* 34 *min.* 12 *sec.*	0.6670638
Logarithme de la tangente du complément de l'hypothénuse IP *donnée de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.*	10.3622168
Logar. de la tang. du complément du segment MP	11.0292806

(b) N. 103. qui (b) donne 84 deg. 39 min. 34 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 5 deg. 20 min. 26 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant retranchée du côté •P que l'on a trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec. laisse 72 deg. 21 min. 21 sec. pour la valeur du segment •M.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle •IP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 5 deg. 20 min. 26 sec. le segment •M que l'on vient aussi de trouver de 72 deg. 21 min. 21 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. (c) N. 303. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), le côté •I qui est le complément de la latitude demandée B•.

Complément du logar. du sinus du complément du segment MP *trouvé de* 5 *deg.* 20 *min.* 26 *sec.* -	0.0018893
Logar. du sinus du complement du segment •M *trouvé de* 72 *deg.* 21 *min.* 21 *sec.* - - - - -	9.4815924
Logar. du sinus du complément du côté IP *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.* - - - - -	9.9624801
Logar. du sinus du complément du côté •I - -	19.4459618

(d) N. 103. qui (d) donne 16 deg. 12 min. 51 sec. pour la valeur de ce complement ;

complément ; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée, puisque cette latitude est ce complément même.

3eme enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle εIP, on connoît le côté εI de 73 deg. 47 min. 9 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude Bε que l'on vient de trouver de 16 deg. 12 min. 51 sec. le côté εP que l'on a trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec. avec l'angle εPI que l'on a aussi trouvé de 77 deg. 34 min. 12 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), l'angle εIP. (a) N. 189.

Complément du logar. du sinus du côté εI trouvé de 73 deg. 47 min. 9 sec. - - - - - - -	0.0176[illegible]
Logar. du sinus du côté εP trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec. - - - - - - - - - - - - - -	9.98990[illegible]
Logar. du sinus de l'angle εPI trouvé de 77 deg. 34 min. 12 sec. - - - - - - - - - -	9.9896987
Logar. du sinus de l'angle εIP - - - - - -	19.9972346

qui (b) donne 96 deg. 27 min. 32 sec. p. m. pour la valeur (b) N. 163.
de cet angle, qui est obtus ; & par conséquent, pour celle de l'arc ♋♎B, qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc ♋♎B (c) N. 196.
est de 96 deg. 27 min. 32 sec. l'arc ♈♋♎B qui est la longitude demandée, est de 186 deg. 27 min. 32 sec. & par conséquent, le point B est le 6me deg. 27 min. 32 de ♎.

AUTRE EXEMPLE.

411. *On donne l'obliquité Q♈♋* de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈Q♎ED de l'Etoile* Scheat Pegasi *marquée ε dans* Bayer, *de 342 deg. 54 min. 57 sec. avec sa déclinaison Dε de 26 deg. 41 min. 41 sec. vers le septentrion ; & il faut trouver la latitude Bε de cette Etoile, & sa longitude ♈♋♎♑B.* Fig. 177.

Iii

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ϵIP formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des trois exemples précedents, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté ϵP de 63 deg. 17 min. 19 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dϵ qui est donnée de 26 deg. 42 min. 41 sec. avec l'angle ϵPI, ou DPE, de 72 deg. 54 min.
(a) N. 196. 57 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure l'excès DE de l'ascension droite ♈Q♎ED qui est donnée de 342 deg. 54 min. 57 sec. sur les trois quarts ♈Q♎E de la circonférence de
(b) N. 217. l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ϵP, (qu'il rencontrera en un point M, parce que les angles IϵP, & IPϵ sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante le côté ϵI, & l'angle ϵIP.

1ent, dans le triangle Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle IPM, ou ϵPI, que l'on vient de trouver de 72 deg. 54 min. 57 sec. Ainsi,
(c) N. 284. l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le segment MP.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle IPM *trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec.*	0.5319831
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP *donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec.* -	10.3622166
Logar. de la tangente du compl. du segment MP -	10.8942001

qui (*a*) donne 82 deg. 43 min. 45 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 7 deg. 16 min. 15 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté ϾP que l'on a trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec. laissera 56 deg. 1 min. 4 sec. pour la valeur du segment ϾM. (*a*) N. 1034.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle ϾIP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 7 deg. 16 min 15 sec. le segment ϾM que l'on vient aussi de trouver de 56 deg. 1 min. 4 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*b*), le côté ϾI qui est le complément de la latitude demandée BϾ. (*b*) N. 1031.

Complément du logar. du sinus du complément du segment MP *trouvé de 7 deg. 16 min. 15 sec.* -	0.0035063
Logar. du sinus du complément du segment ϾM *trouvé de 56 deg. 1 min. 4 sec.* - - - -	9.7473618
Logar. du sinus du complément du côté IP *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - -	9.9624801
Logar. du sinus du compl. du côté ϾI - - - -	19.7133482

qui (*c*) donne 31 deg. 7 min. 12 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée BϾ; puisque cette latitude est ce complément même. (*c*) N. 1025.

3ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ϾIP, on connoît le côté ϾI de 58 deg. 52 min. 48 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude BϾ que l'on vient de

trouver de 31 deg. 7 min. 12 sec. le côté ♋P que l'on a trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec. avec l'angle ♋PI que l'on a aussi trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche
(a) N. 289. de la maniére suivante (a), l'angle ♋IP.

Complément du logar. du sinus du côté ♋I trouvé de 58 deg. 52 min. 48 sec. - - - -	0.0674825
Logarithme du sinus du côté ♋P trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec. - - - - -	9.9509886
Logarithme du sinus de l'angle ♋PI trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec. - - - - -	9.9804007
Logar. du sinus de l'angle ♋IP - - -	19.9988716

(b) N. 103. qui (b) donne 94 deg. 7 min. 42 sec. *p. m.* pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc
(c) N. 196. B♈♋ qui (c) en est la mesure. Mais, puisque l'arc B♈♋ est de 94 deg. 7 min. 42 sec. l'arc ♑B est de 85 deg. 52 min. 18 sec. Ainsi, si l'on ajoûte ce dernier arc aux trois quarts ♈♋♎♑ de la circonférence de l'Ecliptique, on a 355 deg. 52 min. 18 sec. pour la longitude demandée ♈♋♎♑B; & par conséquent, le point B est le 25me deg. 52 min. 18 sec. des ♓.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 178. 412. *Enfin, on donne l'obliquité* Q♈♋ * *de l'Ecliptique, de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec. l'ascension droite* ♈Q♎D *du cœur du* ♏ (Antares) *marqué* α *dans* Bayer, *de* 243 *deg.* 30 *min.* 52 *sec. avec sa déclinaison* Dα *de* 25 *deg.* 50 *min.* 58 *sec. vers le midi; & il faut trouver la latitude* Bα *de cette Etoile, & sa longitude* ♈♋♎B.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle *αip* formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des exemples précedents, on connoît le côté *ip* de 23 deg.

28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle *p* de l'Equateur au Pôle *i* de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté *αp* de 64 deg. 9 min. 2 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dα qui est donnée de 25 deg. 50 min. 58 sec. avec l'angle *αpi*, ou D*p*Q, de 153 deg. 30 m. 57 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure (*a*) N. 196.
l'excès Q♎D de l'ascension droite ♈Q♎D qui est donnée de 243 deg. 30 min. 57 sec. sur le quart ♈Q de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc *i*M d'un (*b*) N. 297.
grand cercle, tiré du sommet de l'angle *i* perpendiculairement au côté *αp*, (prolongé vers M, parce que les angles *ipα*, & *iαp* sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante le côté *αi*, & l'angle *αip*.

1ent, dans le triangle-Sphérique M*ip* qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse *ip* de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle *ip*M de 26 deg. 29 min. 3 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle *αpi*, ou D*p*Q, que l'on vient de trouver de 153 deg. 30 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le segment *p*M. (*c*) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle ipM *trouvé de 26 deg. 29 min. 3 sec.*	0.0481491
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse ip *donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec.* -	10.3622166
Logar. de la tangente du compl. du segment pM -	10.4103657

qui (*d*) donne 68 deg. 45 min. 29 sec. *p. m.* pour la valeur de (*d*) N. 103.

ce complément ; & par conséquent, 21 deg. 14 min. 31 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant ajoûtée au côté *αp*, que l'on a trouvé de 64 deg. 9 min. 2 sec. donne 85 deg. 23 min. 33 sec. pour la valeur du segment *αp*M.

2^ent^, dans le triangle-Sphérique obliquangle *αip*, on connoît le segment *p*M que l'on vient de trouver de 21 deg. 14 min. 31 sec. le segment *αp*M que l'on vient aussi de trouver de 85 deg. 23 min. 33 sec. avec le côté *ip* qui est donné de 25 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 303. l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le côté *αi* qui est le complément de la latitude demandée Bα.

Complément du logar. du sinus du complément du segment pM *trouvé de 21 deg. 14 min. 31 sec.*	0.0305567
Logar. du sinus du complément du segment αpM *trouvé de 85 deg. 23 min. 33 sec.* - - - -	8.9048738
Logar. du sinus du complément du côté ip *donné de 25 deg. 28 min. 30 sec.* - - -	9.9624801
Logar. du sinus du complément du côté αi - -	18.8979106

(b) N. 103. qui (*b*) donne 4 deg. 32 min. 3 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée Bα, puisque cette latitude est ce complément même.

3^ent^ enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle *αip*, on connoît le côté *αi* de 85 deg. 27 min. 57 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude Bα que l'on vient de trouver de 4 deg. 32 min. 3 sec. le côté *αp* que l'on a trouvé de 64 deg. 9 min. 2 sec. avec l'angle *αpi* que l'on a aussi trouvé de 153 deg. 30 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma- (c) N. 289. niére suivante (*c*), l'angle *αip*.

Complément du logar. du sinus du côté ai *trouvé de 85 deg. 27 min. 57 sec.* - - - - -	0.0013613
Logar. du sinus du côté ap *trouvé de 64 deg. 9 min. 2 sec.* - - - - - - - -	9.9542149
Logarithme du sinus de l'angle api *trouvé de 153 d. 30 min. 57 sec.* - - - - - - - - - - -	9.6492866
Logar du sinus de l'angle aip - - - -	19.6048628

qui (a) donne 23 deg. 44 min. 25 sec. *p. m.* pour la valeur de cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'arc B♑ qui (b) en est la mesure. Mais, puisque l'arc B♑ est de 23 deg. 44 min. 25 sec. l'arc ♈♋♎B qui est la longitude demandée, est de 246 deg. 15 min. 35 sec. & par conséquent, le point B est le 6me deg. 15 min. 35 sec. du ♐. (a) N. 103. (b) N. 195.

SCHOLIE.

413. *C'est en cherchant de cette maniére les latitudes & les longitudes des Etoiles, que les Astronomes en ont construit des Catalogues dont le plus célebre est celui de* Bayer. *Et comme cet Usage est un des plus considerables de l'Astronomie, nous y avons proposé des exemples d'Etoiles situées dans différents quarts de l'Ecliptique, & qui déclinent les unes vers un Pôle, & les autres vers un autre ; non-seulement afin de ne laisser rien à desirer sur cet article, mais aussi pour faire voir les différentes maniéres dont il faut s'y prendre pour résoudre les Questions astronomiques, suivant les différents points du Ciel ausquels les Etoiles dont il s'agit sont situées.*

XVIII. USAGE.

414. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la latitude d'une Etoile & sa longitude, trouver la déclinaison de cette Etoile, & son ascension droite.*

*Fig. 179. On donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. la latitude Bα de la *Chevre* marquée α dans *Bayer*, de 22 d. 51 min. 47 sec. avec sa longitude ♈B de 78 deg. 21 min. 8 sec. & il faut trouver la déclinaison Dα de cette Etoile, & son ascension droite ♈D.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle αIP formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles de l'Usage précedent, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 m. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur : le côté αI de 67 deg. 8 min. 13 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude Bα qui est donnée de 22 deg. 51 min. 47 sec. avec l'angle αIP de 11 deg. 38 min. 52 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure le complément B♋ de la longitude ♈B qui est donnée de 78 deg. 21 min. 8 sec. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc PM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté αI, (qu'il rencontrera en un point M, parce que les angles PαI, & PIα sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante le côté αP, & l'angle αPI.

(a) N. 196.

(b) N. 297.

1^ent^, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP, ou αIP, que l'on vient de

trouver

trouver de 11 deg. 38 min. 52 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), le segment IM. (a) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle MIP *trouvé de 11 deg. 38 min. 52 sec.*	0.0090368
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP *donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec.*	10.3622166
Logar. de la tangente du compl. du segment IM -	10.3712534

qui (b) donne 66 deg. 57 min. 27 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 23 deg. 2 min. 33 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant retranchée du côté αI, que l'on a trouvé de 67 deg. 8 min. 13 sec. laisse 44 deg. 5 min. 40 sec. pour la valeur du segment Mα. (b) N. 104.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle αIP, on connoît le segment IM que l'on vient de trouver de 23 deg. 2 min. 33 sec. le segment Mα que l'on vient aussi de trouver de 44 deg. 5 min. 40 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), le côté αP qui est le complément de la déclinaison demandée Dα. (c) N. 303.

Complément du logar. du sinus du complément du segment IM *trouvé de 23 deg. 2 min. 33 sec.* -	0.0361109
Logar. du sinus du complément du segment Mα *trouvé de 44 deg. 5 min. 40 sec.* - - - - -	9.8562426
Logar. du sinus du compl. du côté IP *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - - -	9.9624801
Logar. du sinus du complément du côté αP - -	19.8548326

qui (d) donne 45 deg. 42 min. 51 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la déclinaison demandée Dα, puisque cette déclinaison est ce complément même. (d) N. 103.

3ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ♈IP, on connoît le côté ♈P de 44 deg. 17 min. 9 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D♈ que l'on vient de trouver de 45 deg. 42 min. 51 sec. le côté ♈I que l'on a trouvé de 67 deg. 8 min. 13 sec. avec l'angle ♈IP que l'on a aussi trouvé de 11 deg. 38 min. 52 sec. Ainsi, l'on cherche (a) N. 289. de la maniére suivante (a), l'angle ♈PI.

Complément du logar. du sinus du côté ♈P *trouvé de* 44 *deg.* 17 *min.* 9 *sec.* - - -	0.1559964
Logar. du sinus du côté ♈I *trouvé de* 67 *deg.* 8 *min.* 13 *sec.* - - - - - -	9.9644652
Logar. du sinus de l'angle ♈IP *trouvé de* 11 *deg.* 38 *min.* 52 *sec.* - - - - - -	9.3051248
Logar. du sinus de l'angle ♈PI - - -	19.4255864

(b) N. 103. qui (b) donne 164 deg. 32 min. 52 sec. pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc E♈D (c) N. 196. qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc E♈D est de 164 deg. 32 min. 52 sec. l'arc ♈D qui est l'ascension droite demandée, est de 74 deg. 32 min. 52 sec.

SCHOLIE I.

415. *On peut voir par la maniére dont nous avons résolu les différentes Questions de l'usage précedent, & par celle dont nous venons de résoudre cette derniére, ce qu'il faudroit faire si l'on proposoit une Etoile située dans un quart de l'Ecliptique différent de celui dans lequel se trouve l'Etoile que nous venons de prendre pour exemple, ou une Etoile dont la latitude seroit méridionale.*

SCHOLIE II.

416. *Lorsque l'on connoîtra la latitude & la longitude d'une Planette quelconque, on pourra se servir de la manière suivante, de ce qui est enseigné dans cet Usage, pour trouver la Parallaxe de hauteur de cette Planette.*

On observera avec la dernière exactitude, & l'instant auquel la Planette dont on voudra connoître la Parallaxe de hauteur passera par le Méridien, & la hauteur de cette Planette sur l'horison à cet instant. On cherchera ensuite de la même manière dont nous venons de le faire dans cet Usage, quelle sera la déclinaison de cette même Planette à ce même instant; & si cette déclinaison est méridionale, on la retranchera de la hauteur de l'Equateur; mais si elle est septentrionale, on l'ajoûtera à cette même hauteur; & la différence, ou la somme, sera la vraie hauteur de la Planette proposée. Enfin, après avoir corrigé la hauteur observée; (c'est-à-dire, après en avoir retranché ce qu'il conviendra d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité), on soustraira de cette vraie hauteur cette hauteur corrigée, & le reste sera la Parallaxe demandée †.

SCHOLIE III.

417. *Enfin, lorsque l'on aura trouvé par la Scholie précédente, la Parallaxe de hauteur*

† C'est par ce qui est enseigné dans cette Scholie que l'on a construit la Table des Parallaxes du Soleil, qui est à la fin de ce Traité.

* Fig. 152. *d'une Planette quelconque S**, *& par conséquent la vraie hauteur* HCS *de cette Planette sur l'horison astronomique* HO, *on connoîtra dans le triangle rectiligne* STC, *l'angle* CST *qui sera cette Parallaxe, avec l'angle* SCT *qui sera le complément de cette vraie hauteur. Ainsi, en prenant le rayon* CT *de la Terre pour l'unité,*
(a) N. 119. *on cherchera de la maniére suivante* (a), *la distance* CS *du centre* S *de la Planette dont il s'agira au centre* C *de la Terre.*

Complément du logarithme du sinus de l'angle CST, parallaxe connue de la Planette proposée S	* * *
Logar. du sinus de l'angle STC, supplément des angles connus CST & SCT - - - - -	* * *
Logarithme du demi-diamétre CT de la Terre, que l'on prendra pour l'unité - - - - - -	0.0000000
Logarithme de la distance demandée CS - -	* * *

(b) N. 103. *qui* (b) *donnera le nombre de demi-diamétres* CT *que cette distance contiendra.*

XIX. USAGE.

418. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la longitude d'une Etoile, trouver la déclinaison & la latitude de cette Etoile.*

* Fig. 180. ON donne l'obliquité Q♈♋* de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈D de la Corne boréale du ♉ marquée ε dans *Bayer*, de 77 deg. 36 min. 32 sec. avec sa longitude ♈B de 79 deg. 4 min. 6 sec. & il faut trouver la déclinaison Dε de cette Etoile, & sa latitude Bε.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ♋IP, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: l'angle ♋IP de 10 deg. 55 min. 54 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure le complément B♋ de la longitude ♈B, qui est donnée de 79 deg. 4 min. 6 sec. avec l'angle ♋PI, ou DPE, de 167 deg. 36 min. 32 sec. puisque (*b*) cet angle a pour mesure la somme E♈D de l'ascension droite ♈D, qui est donnée de 77 deg. 36 min. 32 sec. & du quart E♈ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (*c*) un arc PM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté ♋I, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles P♋I & PI♋ sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante les côtés ♋P & ♋I qui sont les complémens, l'un de la déclinaison demandée D♋, & l'autre de la latitude demandée B♋.

(*a*) N. 196.

(*b*) N. 196.

(*c*) N. 297.

1ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP, ou ♋IP, que l'on a trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*d*), l'angle IPM.

(*d*) N. 283.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse IP *donnée de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.*	0.0375199
Logar. de la tangente du compl. de l'angle MIP *trouvé de* 10 *deg.* 55 *min.* 54 *sec.* - - - -	10.7141212
Logar. de la tangente de l'angle IPM - - - -	10.7516411

(a) N. 103. qui (a) donne 79 deg. 57 min. 14 sec. p. m. pour la valeur de cet angle ; laquelle étant retranchée de l'angle CPI, que l'on a trouvé de 167 deg. 36 min. 32 sec. laisse 87 deg. 39 min. 18 sec. pour la valeur de l'angle CPM.

2^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle CPI, on connoît l'angle au sommet IPM que l'on vient de trouver de 79 deg. 57 min. 14 sec. l'autre angle au sommet CPM que l'on vient aussi de trouver de 87 deg. 39 min. 18 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma- (b) N. 305. niére suivante (b), le côté CP qui est le complément de la déclinaison demandée DC.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle IPM *trouvé de* 79 *deg.* 57 *min.* 14 *sec.* - - - - -	0.7583524
Logarithme du sinus du complément de l'angle CPM *trouvé de* 87 *deg.* 39 *min.* 18 *sec.* - - - -	8.6118966
Logarithme de la tangente du compl. du côté IP *donné de* 23 *deg.* 28 *min.* 30 *sec.* - - - - -	10.3622166
Logar. de la tangente du complément du côté CP -	19.7324656

(c) N. 103. qui (c) donne 28 deg. 22 min. 22 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la déclinaison demandée DC.

3^ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle CPI, on connoît l'angle CIP que l'on a trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. l'angle CPI que l'on a aussi trouvé de 167 deg 36 min. 32 sec. avec le côté CP dont on vient de trou-

ver le complément Dc de 28 deg. 22 min. 22 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), le côté cI qui est le complément de la latitude demandée Bc. (a) N. 291.

Complément du logarithme du sinus de l'angle cIP *trouvé de* 10 *deg.* 55 *min.* 54 *sec.* - - - -	0.7220744
Logarithme du sinus de l'angle cPI *trouvé de* 167 *d.* 36 *min.* 32 *sec.* - - - - - - - - - - -	9.3315968
Logar. du sinus du côté cP *trouvé de* 61 *deg.* 37 *min.* 38 *sec.* - - - - - - - - - - -	9.9444207
Logar. du sinus du côté cI - - - - - - - -	19.9980919

qui (b) donne 84 deg. 37 min. 59 sec pour la valeur de ce côté; & par conséquent, 5 deg. 22 min. 1 sec. pour celle de la latitude demandée Bc. (b) N. 103.

SCHOLIE.

419. *Si pour résoudre le triangle-Sphérique obliquangle* cIP * *on avoit fait passer l'arc perpendiculaire par le sommet de l'angle* I, *cet arc auroit rencontré le côté* cP *prolongé vers* m, *parce que les angles* IPc *&* IcP *sont de différente espece. Ainsi il auroit fallu chercher* (c) *l'angle* PIm *du triangle-Sphérique* mPI *qui* [c] *auroit été rectangle en* m; *& dont on auroit connu l'hypoténuse* IP *qui est donnée, avec l'angle* mPI *qui auroit été le supplément de l'angle* DPE. *On auroit ensuite ajouté cet angle* PIm *à l'angle* cIP, *afin d'avoir l'angle* cIm; *& l'on auroit cherché* (d) *le côté* cI *du triangle-Sphérique obliquangle* cIP, *dans lequel on auroit connu les angles au sommet* PIm, *&* cIm, *avec le côté* IP. *Enfin, l'on auroit aussi cherché* (e) *le côté* cP *de ce* * Fig. 180. (c) N. 283. (d) N. 315. (e) N. 291.

même triangle; & l'on auroit trouvé pour ces deux côtés les mêmes nombres que nous avons trouvés dans cet Usage.

Mais, si l'on avoit proposé une Etoile située dans le second, dans le troisiéme, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on auroit vû par les exemples du 17me Usage, la maniére dont il auroit fallu s'y prendre pour connoître les angles ϛIP, *&* ϛPI *; & l'on auroit ensuite cherché de la même maniére dont nous venons de le faire dans ce 19me Usage, ou dans cette Scholie, les complémens* ϛP, *&* ϛI, *de la déclinaison & de la latitude demandées.*

XX. USAGE.

420. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la latitude d'une Etoile, trouver la déclinaison, & la longitude de cette Etoile.*

Fig. 181. ON donne l'obliquité Q♈♋ de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈D de l'œil du ♉ (*Aldebaran*) marqué α dans *Bayer*, de 65 deg. 22 min. 51 sec. avec sa latitude Bα qui est méridionale, de 5 deg. 29 m. 15 sec. & il faut trouver la déclinaison Dα de cette Etoile, & sa longitude ♈B.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle αIP, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique,

que, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté ♈BI de 95 deg. 29 min. 15 sec. puisque ce côté est la somme de la latitude B♈ qui est donnée de 5 deg. 29 min. 15 sec. & du quart BI de la circonférence du cercle de latitude de l'Etoile proposée; avec l'angle ♈PI, ou DPE, de 155 deg. 22 min. 51 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure la somme E♈D de l'ascension droite ♈D qui est donnée de 65 deg. 22 min. 51 sec. & du quart E♈ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi après avoir supposé (*b*) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ♈P, (prolongé vers M, parce que les angles IP♈, & I♈P sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté ♈P, & l'angle ♈IP.

(*a*) N. 196.

(*b*) N. 197.

1.^ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle MPI de 24 deg. 37 min. 9 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle DPE que l'on a trouvé de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le segment PM.

(*c*) N. 184.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MPI *trouvé de* 24 *d.* 37 *m,* 9 *s.* - - - - - - -	0.0413899
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP *donnée de* 23 *deg.* 28 *m.* 30 *s.* - - - - -	10.3622166
Logar. de la tang. du compl. du segment PM - -	10.4036065

qui (*d*) donne 68 deg. 27 min. 18 sec. *p. p.* pour la valeur de (*d*) N. 105.

même triangle; & l'on auroit trouvé pour ces deux côtés les mêmes nombres que nous avons trouvés dans cet Usage.

Mais, si l'on avoit proposé une Etoile située dans le second, dans le troisiéme, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on auroit vû par les exemples du 17me Usage, la maniére dont il auroit fallu s'y prendre pour connoître les angles ☉IP, *&* ☉PI; *& l'on auroit ensuite cherché de la même maniére dont nous venons de le faire dans ce 19me Usage, ou dans cette Scholie, les complémens* ☉P, *&* ☉I, *de la déclinaison & de la latitude demandées.*

XX. USAGE.

420. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la latitude d'une Etoile, trouver la déclinaison, & la longitude de cette Etoile.*

Fig. 181. ON donne l'obliquité Q♈♋ de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite ♈D de l'œil du ♉ (*Aldebaran*) marqué α dans *Bayer*, de 65 deg. 22 min. 51 sec. avec sa latitude Bα qui est méridionale, de 5 deg. 29 m. 15 sec. & il faut trouver la déclinaison Dα de cette Etoile, & sa longitude ♈B.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle αIP, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique,

que, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté ♈BI de 95 deg. 29 min. 15 sec. puisque ce côté est la somme de la latitude B♈ qui est donnée de 5 deg. 29 min. 15 sec. & du quart BI de la circonférence du cercle de latitude de l'Etoile proposée; avec l'angle ♈PI, ou DPE, de 155 deg: 22 min: 51 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la somme E♈D de l'ascension droite ♈D qui est donnée de 65 deg. 22 min. 51 sec. & du quart E♈ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ♈P, (prolongé vers M, parce que les angles IP♈, & I♈P sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté ♈P, & l'angle ♈IP.

(a) N. 196.

(b) N. 297.

1[ent], dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle MPI de 24 deg. 37 min: 9 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle DPE que l'on a trouvé de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), le segment PM.

(c) N. 284.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MPI *trouvé de 24 d. 37 m, 9 s.* - - - - - -	0.0413899
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP *donnée de 23 deg. 28 m. 30 s.* - - - - -	10.3622166
Logar. de la tang. du compl. du segment PM -	10.4036065

qui (d) donne 68 deg. 27 min. 18 sec. *p. p.* pour la valeur de (d) N. 103.

ce complément ; & par conséquent, 21 deg. 32 min. 42 sec. pour celle de ce segment.

2^ent^, dans le triangle-Sphérique obliquangle *a*IP, on connoît le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. le côté *a*BI que l'on a trouvé de 95 deg. 29 min. 15 sec. avec le segment PM que l'on vient de trouver de 21 deg. 32 min. 42 sec. Ainsi, l'on cherche
(*a*) N. 303. de la maniére suivante (*a*), l'autre segment *a*PM.

Compl. du logar. du sinus du compl. du côté IP donné de 23 d. 28 m. 30 s. - - - - - -	0.0375194
Logar. du sinus du compl. du côté aBI trouvé de 95 deg. 29 m. 15 s. - - - - - - - -	8.9805874
Logar. du sinus du compl. du seg. PM trouvé de 21 deg. 31 m. 42 s. - - - - - - - - -	9.9685433
Logar. du sinus du compl. du segment aPM - - -	18.9866506

(*b*) N. 203. qui (*b*) donne 5 deg. 33 min. 54 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 95 deg. 33 min. 54 sec. pour
(*c*) N. 239. celle de ce segment ; lequel (*c*) vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, puisque dans le triangle-Sphérique *a*IM qui [*c*] est rectangle en M, l'hypoténuse *a*BI vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & que le côté IM vaut moins que ce quart. Or, puisque le segment *a*PM est de 95 deg. 33 min. 54 sec. & le segment PM de 21 deg. 32 min. 42 sec. le côté *a*P, qui est le complément de la déclinaison demandée D*a*, est de 74 deg. 1 min. 12 sec. & par conséquent, cette déclinaison est de 15 deg. 58 min. 48 sec.

3^ent^ enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle *a*IP, on connoît le côté *a*BI que l'on a trouvé de 95 deg. 29 min. 15 sec. le côté *a*P que l'on vient de trouver de 74 deg. 1 min. 12 sec. avec l'angle *a*PI que l'on a aussi trou-

vé de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), l'angle ♈IP, (a) N. 289.
ou BI♋.

Compl. du logar. du sinus du côté ♈BI trouvé de 95 deg. 29 m. 15 s. - - - - - - - - - 0,0019949
Logar. du sinus du côté ♈P trouvé de 74 d. 1 m. 12 s. - - - - - - - - - - - - - - 9.9828808
Logar. du sinus de l'angle ♈PI trouvé de 155 deg. 22 m. 51 sec. - - - - - - - - - - - - 9.6197035

Logar. du sinus de l'angle ♈IP - - - - - - - 19.6045792

qui (b) donne 23 deg. 43 min. 25 sec. pour la valeur de cet angle; & par conséquent, pour celle de l'arc B♋ qui (b) en est la mesure. Or, puisque l'arc B♋ est de 23 deg. 43 min. 25 sec. la longitude demandée ♈B, qui est le complément de cet arc, est de 66 deg. 16 min. 35 sec. (b) N. 103. (c) N. 194.

SCHOLIE.

421. *Si l'on avoit proposé une Etoile située dans un quart de l'Ecliptique différent de celui dans lequel on trouve l'Etoile que nous avons prise pour exemple, on auroit vû par quelqu'un des exemples du 17me Usage, ce qu'il auroit fallu faire pour connoître l'angle ♈PI *; & l'on auroit ensuite cherché le côté ♈P, avec l'angle ♈IP, de la même maniére dont nous venons de le faire.* * Fig. 181.

XXI. USAGE.

422. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la déclinaison & la longitude d'une Etoile, trouver la latitude de cette Etoile, & son ascension droite.*

ON donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. la déclinaison D♈ de * Fig. 182.

l'Oreille du ♈ marqué γ dans *Bayer*, de 18 deg. 3 min. 11 sec. vers le septentrion, avec sa longitude ♈B de 29. deg. 40 min. 9 sec. & il faut trouver la latitude Bγ de cette Etoile, & son ascension droite ♈D.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle γPI, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté γP de 71 deg. 56 min. 49 sec. puisque ce côté est le complement de la déclinaison Dγ, qui est donnée de 18 deg. 3 min. 11 sec. avec l'angle γIP, ou BI♋, de 60 deg. 19 min. 51 sec. puisque (*a*) cet angle a pour mesure le complément B♈ de la longitude ♋B laquelle est donnée de 29 deg. 40 min. 9 sec. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc PM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté γI, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles PIγ, & PγI sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante, le côté γI, & l'angle γPI.

(*a*) N. 196.

(*b*) N. 297.

1ent, dans le triangle-Sphérique MPI qui [*c*] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP, ou γIP, que l'on vient de trouver de 60 deg. 19 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le segment IM.

(*c*) N. 284.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MIP
trouvé de 60 deg. 19 m. 51 s. - - - - - - 0.3054026
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP
donnée de 23 d. 28 m. 30 s. - - - - - - 10.3622166

Logar. de la tangente du compl. du segment IM - 10.6676192
qui (*a*) donne 77 deg. 52 min. 4 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 12 deg. 7 min. 56 sec. pour celle de ce segment. (*a*)

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle γPI, on connoît le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. le côté γP que l'on a trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec. avec le segment IM que l'on vient de trouver de 12 deg. 7 min. 56 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*b*), l'autre segment γM. (*b*) N. 303.

Complément du logar. du sinus du complément du côté IP *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - 0.0375199
Logar. du sinus du complément du côté γP *trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec.* - - - - - - - - 9.4912181
Logar. du sinus du compl. du seg. IM *trouvé de 12 deg. 7 min. 56 sec.* - - - - - - - - 9.9901901

Logar. du sinus du compl. du segment γM - - 19.5189281
qui (*c*) donne 19 deg. 17 min. 16 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 70 deg. 42 min. 44 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant ajoûtée au segment IM que l'on a trouvé de 12 deg. 7 min. 56 sec. donne 82 deg. 50 min. 40 sec. pour la valeur du côté γI. Or, puisque le côté γI, qui est le complément de la latitude demandée Bγ, est de 82 deg. 50 min. 40 sec. cette latitude est de 7 deg. 9 min. 20 sec. (*c*) N. 103.

3ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle γPI, on connoît le côté γP que l'on a trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec. le côté γI que l'on vient de trouver de 82 deg. 50 min. 40 sec. avec l'angle γIP que l'on a aussi trouvé

de 60 deg. 19 min. 51 sec. Ainsi, l'on cher-
(a) N. 289. che de la maniére suivante (a), l'angle γPI.

Complém. du logarithme du sinus du côté γ P trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec. - - - - - - -	0.0219246
Logar. du sinus du côté γ I trouvé de 82 deg. 50 min. 40 sec. - - - - - - - - - - - - - -	9.9966043
Logar. du sinus de l'angle γ IP trouvé de 60 deg. 19 min. 51 sec. - - - - - - - - - - -	9.9389688
Logar. du sinus de l'angle γ PI - - - - - -	19.9574977

(b) N. 103. qui (b) donne 114 deg. 56 min. 13 sec. pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc
(c) N. 196. EγD qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc EγD est de 114 deg. 56 min. 13 sec. l'ascension droite demandée γD est de 24 deg. 56 min. 13 sec.

SCHOLIE.

423. *On pourroit s'y prendre aussi de la maniére suivante, pour trouver dans le triangle-Sphé-*
* Fig. 182. *rique obliquangle* γPI *, *le côté* γI, *& l'angle* γPI.
(d) N. 283. Premiérement, *on chercheroit (d) l'angle* IPM *du triangle-Sphérique rectangle* MPI *dont on connoîtroit, de même que dans cet Usage, l'hypoténuse* IP, *& l'angle* MIP. *On chercheroit en-*
(e) N. 315. *suite (e) l'angle au sommet* γPM *du triangle-Sphérique obliquangle* γPI *dont on connoîtroit, de même aussi que dans ce même Usage, les côtés* IP *&* γP, *avec l'autre angle au sommet* MPI *que l'on viendroit de trouver; & l'on ajoûteroit cet angle* MPI *à l'angle* γPM, *afin d'avoir*
(f) N. 291. *l'angle* γPI. *Enfin, on chercheroit (f) le côté* γI *de ce même triangle dont on connoîtroit les angles* γIP *&* γPI, *avec le côté* γP; *& l'on*

trouveroit pour ce côté ♈I, de même que pour l'angle ♈PI, les mêmes nombres que nous venons de trouver dans cet Usage.

Et si l'on proposoit une Etoile située dans le second, dans le troisiéme, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on verroit par quelqu'un des exemples du 17me Usage, ce qu'il faudroit faire pour connoître l'angle ♈IP; avec l'on chercheroit ensuite le côté ♈I, avec l'angle ♈PI, de la même maniére dont nous venons de le faire.

XXII. USAGE.

424. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la déclinaison & la latitude d'une Etoile, trouver l'ascension droite de cette Etoile, & sa longitude.*

ON donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. la déclinaison Dα de l'Etoile polaire marquée α dans *Bayer*, de 87 deg. 58 min. 10 sec. avec sa latitude Bα de 66 deg. 4 min. 19 sec. & il faut trouver l'ascension droite ♈D de cette Etoile, & sa longitude ♈B. *Fig. 183.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle αPI, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté αP de 2 deg. 1 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dα

qui est donnée de 87 deg. 58 min. 10 sec. avec le côté ♈I de 23 deg. 55 min. 41 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B♈ qui est aussi donnée de 66 deg. 4 min. 19 sec. Ainsi, l'on cherche 1ent l'angle ♈PI, de la manière suivante (a).

(a) N. 293.

Premiérement,

Valeur donnée du côté IP	23 *d.*	28 *m.*	30 *s.*
Valeur trouvée du côté ♈P	2	1	50
Valeur trouvée du côté ♈I	23	55	41
Somme de ces trois côtés	49	26	1
Moitié de cette somme	24	43	0½
Differ. du côté IP à cette moitié	1	14	30½
Differ. du côté ♈P à cette même moitié	22	41	10½

Secondement,

Complément du logar. du sinus du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	0.3997363
Complément du logar. du sinus du côté ♈P trouvé de 2 deg. 1 min. 50 sec.	1.4506007
Logar. du sinus de la différence du côté IP, trouvée de 1 deg. 14 min. 30 sec.½	8.3358871
Logar. du sinus de la différence du côté ♈P, trouvée de 22 deg. 41 min. 10 sec.½	9.5862325
Logar. du quarré du sinus de la moitié de l'angle ♈PI	19.7724566
Moitié de ce logar. ou logar. du sinus de la moitié de cet angle	9.8862283

(b) N. 103. qui (b) donne 50 deg. 18 min. 43 sec. *p. p.* pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 100 deg. 37 min. 26 sec. pour celle de cet angle. Or, puisque l'angle ♈PI est de 100 deg. 37 min. 26 sec. l'arc E♈D qui (c) en est la mesure, est d'un pareil nombre de degrés; & par conséquent, l'ascension droite demandée ♈D est de 10 deg. 37 min. 26 sec.

(c) N. 196.

2ent,

2^{ent}, l'angle αIP, de la maniére suivante (a). (a) N. 289.

Complément du logar. du sinus du côté αI *trouvé de 23 deg. 55 min. 41 sec.* - - - - - - - -	0.3919137
Logarithme du sinus du côté αP *trouvé de 2 deg. 1 min. 50 sec.* - - - - - - - - - - - -	8.5493993
Logar. du sinus de l'angle αPI *trouvé de 100 deg. 37 min. 26 sec.* - - - - - - - - - - - -	9.9924910
Logar. du sinus de l'angle αIP - - - - - -	18.9338040

qui (b) donne 4 deg. 55 min. 32 sec. pour la valeur de cet angle; & par conséquent, pour celle de l'arc B♋ qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc B♋ est de 4 deg. 55 min. 32 sec. la longitude demandée ♈B, qui est le complément de cet arc, est de 85 deg. 4 min. 28 sec. (b) N. 203. (c) N. 196.

XXIII. USAGE.

425. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec la déclinaison d'une Etoile, trouver combien de temps cette Etoile demeure sur cet horison.*

ON donne la déclinaison Dα* du cœur du ♌ (*Régulus*) marqué α dans *Bayer*, de 13 deg. 11 min. 16 sec. vers le septentrion; & l'on demande combien de temps cette Etoile demeure sur l'horison de Paris. * Fig. 184

Solution. Dans le triangle-Sphérique CαD qui est rectangle en D, on connoît le côté Dα de 13 d. 11 m. 16 sec. puisque ce côté est donné de cette grandeur; avec l'angle DCα de 41 d. 9 m. 50 s. puisque (d) cet angle a pour mesure le complément OQ de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 d. 50 m. 10 s. (d) N. 196.

XXIV. USAGE.

428. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite d'une Etoile, trouver le point de ce cercle qui sera au Méridien en même temps que cette Etoile.*

* Fig. 286. ON donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite ♈QD de *Régulus* de 148 deg. 44 min. 30 sec. & il faut trouver le point C de l'Ecliptique, qui sera au Méridien EPQ en même temps que cette Etoile.

Solution. Dans le triangle-Sphérique D♎C qui est rectangle en D, on connoît l'angle D♎C de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur; avec le côté D♎ de 31 deg. 15 min. 30 sec. puisque ce côté est le supplément de l'ascension droite ♈QD, qui est donnée de 148 deg. 44 min. 30 sec. Ainsi,
(a) N. 285. l'on cherche de la maniére suivante (a), l'hypoténuse C♎.

Logarithme du sinus du complément de l'angle D♎C *donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.* - -	9.9624801
Logar. de la tangente du complément du côté D♎ *trouvé de 31 deg. 15 min. 30 sec.* - - -	10.2168014
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse C♎	10.1792815

(b) N. 103. qui (b) dônne 56 deg. 30 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 33 deg. 29 min. 46 sec. pour celle de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée de la moitié ♈♋♎ de la circonférence de l'Ecliptique, laisse 146 deg. 30 min. 14 sec. pour l'arc ♈♋C. Or, puisque l'arc ♈♋C est de 146 deg. 30 min. 14 sec. le point C est le 16me deg. 30 min. 14 sec. du ♌.

XXV. USAGE.

429. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, celle d'une Etoile quelconque sur cet horison, l'ascension droite & la déclinaison de cette Etoile ; trouver le point de l'Equateur qui étoit au Méridien de ce lieu, à l'instant auquel cette même Etoile étoit à la hauteur proposée.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur ⍺C de la Corne suivante du ♈ (*la Luisante du* ♈) marquée ⍺ dans *Bayer*, observée de 30 degrés dans l'hémisphére oriental ; l'ascension droite ♈D de cette Etoile, de 28 deg. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison D⍺ de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion ; & il faut trouver le point E de l'Equateur, qui étoit au Méridien HZO à l'instant auquel cette même Etoile étoit à cette hauteur ⍺C.

* Fig. 187.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ⍺PZ, on connoît le côté ⍺P de 67 deg. 44 min. 11 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D⍺ qui est donnée de 22 deg. 15 min. 49 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec le côté Z⍺ de 60 deg. puisque ce côté est le complément de la hauteur ⍺C de l'Etoile proposée, qui est aussi

XXIV. USAGE.

428. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite d'une Etoile, trouver le point de ce cercle qui sera au Méridien en même temps que cette Etoile.*

* Fig. 286. ON donne l'obliquité Q♈♋ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite ♈QD de *Régulus* de 148 deg. 44 min. 30 sec. & il faut trouver le point C de l'Ecliptique, qui sera au Méridien EPQ en même temps que cette Etoile.

Solution. Dans le triangle-Sphérique D♎C qui est rectangle en D, on connoît l'angle D♎C de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur; avec le côté D♎ de 31 deg. 15 min. 30 sec. puisque ce côté est le supplément de l'ascension droite ♈QD, qui est donnée de 148 deg. 44 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 285. l'on cherche de la maniére suivante (a), l'hypoténuse C♎.

Logarithme du sinus du complément de l'angle D♎C donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	9.9624801
Logar. de la tangente du complément du côté D♎ trouvé de 31 deg. 15 min. 30 sec.	10.2168014
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse C♎	10.1792815

(b) N. 103. qui (b) dônne 56 deg. 30 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 33 deg. 29 min. 46 sec. pour celle de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée de la moitié ♈♋♎ de la circonférence de l'Ecliptique, laisse 146 deg. 30 min. 14 sec. pour l'arc ♈♋C. Or, puisque l'arc ♈♋C est de 146 deg. 30 min. 14 sec. le point C est le 16me deg. 30 min. 14 sec. du ♌.

XXV. USAGE.

429. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, celle d'une Etoile quelconque sur cet horison, l'ascension droite & la déclinaison de cette Etoile ; trouver le point de l'Equateur qui étoit au Méridien de ce lieu, à l'instant auquel cette même Etoile étoit à la hauteur proposée.*

ON donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur αC de la Corne suivante du ♈ (*la Luisante du* ♈) marquée α dans *Bayer*, observée de 30 degrés dans l'hémisphére oriental ; l'ascension droite ♈D de cette Etoile, de 28 deg. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison Dα de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion ; & il faut trouver le point E de l'Equateur, qui étoit au Méridien HZO à l'instant auquel cette même Etoile étoit à cette hauteur αC. * Fig. 187.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle αPZ, on connoît le côté αP de 67 deg. 44 min. 11 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison Dα qui est donnée de 22 deg. 15 min. 49 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec le côté Zα de 60 deg. puisque ce côté est le complément de la hauteur αC de l'Etoile proposée, qui est aussi

donnée de 30 deg. Ainsi, l'on cherche de la (a) N. 293. maniére suivante (a), l'angle ♈PZ.

Premiérement,

Valeur trouvée du côté ♈P - - - - - -	67 d.	44 m.	11 s.
Valeur trouvée du côté PZ - - - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté Z♈ - - - - - -	60	0	0
Somme de ces trois côtés - - - - - -	168	54	1
Moitié de cette somme - - - - - - -	84	27	0½
Differ. du côté ♈P à cette moitié - - - -	16	42	49½
Differ. du côté PZ à cette même moitié - -	43	17	10½

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté ♈P trouvé de 67 deg. 44 min. 11 sec. - - - - - -	0.0336469
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	0.1816311
Logar. du sinus de la différence du côté ♈P, trouvée de 16 deg. 42 min. 49 sec. ½ - - - - - -	9.4587743
Logar. du sinus de la différence du côté PZ, trouvée de 43 deg. 17 min. 10 sec. ½ - - - - - -	9.8360984
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle ♈PZ - - - - - - - - - - -	19.5101518
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - - - - - -	9.7550759

(b) N. 103. qui (b) donne 34 deg. 40 min. 38 sec. p. p. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 69 deg. 21 min. 16 sec. pour (c) N. 196. celle de cet angle, ou de l'arc E♈D qui (c) en est la mesure. Mais, puisque l'arc E♈D est de 69 deg. 21 min. 16 sec. & que l'arc ♈D est donné de 28 deg. 16 min. 27 sec. l'arc E♈ est de 41 deg. 4 min. 49 sec. Donc, l'arc ♈Q♎E est de 318 deg. 55 min. 11 sec. & par conséquent, le point demandé E est le 318 deg. 55 min. 11 sec. de l'Equateur.

AUTRE EXEMPLE.

430. *On donne précisément les mêmes choses que dans l'exemple précedent : mais on suppose*

*que la hauteur a*C * *de l'Etoile proposée a a été observée dans l'hémisphére occidental ; & il faut de même trouver le point* E *de l'Equateur, qui étoit au Méridien* HZO *à l'instant auquel cette Etoile étoit à la hauteur proposée.* * Fig. 188.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle aPZ, on connoît le côté aP de 67 deg. 44 min. 11 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec le côté Za de 60 deg. de même que dans le triangle de l'exemple précedent. Ainsi, l'on trouve précisément de la même maniére dont on l'a fait dans cet exemple, l'angle aPZ, & par conséquent l'arc DE de l'Equateur, de 69 deg. 21 min. 16 sec. auquel si l'on ajoûte l'arc ♈D, qui est donné de 28 deg. 16 min. 27 sec. on a le 97me deg. 37 min. 43 sec. de l'Equateur, pour le point de ce cercle qui étoit au Méridien à l'instant proposé.

SCHOLIE.

431. *Si après avoir trouvé de la maniére dont nous venons de le faire, le point* Culminant *de l'Equateur à l'instant auquel une Etoile est à une certaine hauteur, c'est-à-dire le point de l'Equateur qui étoit au Méridien à l'instant auquel on a observé la hauteur d'une certaine Etoile, on prend la différence de ce point à l'ascension droite du Soleil, cette différence sera la distance de cet Astre au Méridien à l'instant auquel on aura fait cette observation ; & par conséquent, si l'on réduit cette différence en temps, on connoîtra l'heure qu'il étoit à cet instant.*

*Fig. 187. *Ainsi, si l'ascension droite ♈QS * du Soleil avoit été, par exemple, de 284 deg. 30 min. 11 s. au midi du jour auquel on a observé la* Luisante *du ♈ élevée de 30 d. sur l'horison oriental* HCO, *la distance* SE *de cet Astre au Méridien* HZO, *auroit été à cet instant de 34 deg. 25 min. vers l'occident; & par conséquent, il auroit été 2 heures 17 min. 40 sec. après midi, à l'instant auquel on auroit fait cette observation. Mais, si cette même hauteur avoit été observée dans l'hé-*
*Fig. 188. *misphére occidental, l'arc* E♎QS * *auroit alors été de 186 deg. 52 min. 28 sec. & par conséquent, il auroit été 11 heures 32 min. 30 sec.* p. p. *du soir, à l'instant auquel on auroit observé cette derniére hauteur.*

*Mais il faut remarquer 1*ent*, que cette maniére de trouver l'heure n'est jamais parfaitement juste; parce que l'ascension droite du Soleil augmentant d'instant en instant, jusqu'à un degré environ en 24 heures, on ne peut la connoître en rigueur, qu'en connoissant l'heure, qui est précisément ce que l'on cherche. L'erreur ne peut cependant pas être de 4 minutes d'heure, puisqu'un degré de l'Equateur étant réduit en temps, ne produit que ce nombre.*

2*ent*, *que quoique cette maniére de connoître l'heure ne soit pas d'une précision rigoureuse; cependant, si après avoir pris la différence 9 heures 14 min. 50 sec. du premier temps 2 heures 17 m. 40 sec. au dernier 11 heures 32 min. 30 sec. on ajoûte à ce premier temps, ou l'on soustrait*

du

du dernier, la moitié 4 *heures* 37 *min.* 25 *sec. de cette différence, la somme, ou le reste,* 6 *heures* 55 *min.* 5 *sec. sera l'instant juste du passage de l'Etoile proposée par le Méridien, tel qu'on l'auroit trouvé par le N°* 402.

XXVI. USAGE.

432. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec l'ascension droite & la déclinaison d'une Etoile; trouver la hauteur de cette Etoile sur cet horison, à un temps donné.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. l'ascension droite ♈D de la *Luisante* du ♈ de 28 d. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison D✱ de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion; & il faut trouver quelle étoit la hauteur ✱C de cette Etoile sur cet horison HO, le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à deux heures après midi. * Fig. 189.

Solution. Après avoir connu par quelques Ephémerides, ou par les Tables de M. De *Cassini*, que le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à deux heures après midi, le lieu du Soleil étoit le 17me deg. 32 min. 13 sec. du ♑, on cherche (*a*) quelle devoit être son ascension droite à cet instant; & l'on trouve qu'elle étoit de 289 deg. 0 m. 35 sec. Ainsi, le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à 2 heures après midi, (a) N. 541.

le 289me d. 0 m. 35 ſ. de l'Equateur étoit éloigné du Méridien HZO de 30 deg. vers l'occident; & par conſéquent, le point E de l'Equateur qui étoit au Méridien à cet inſtant, étoit ſon 319me d. 0 m. 35 ſ. Mais, puiſque le point E étoit le 319me d. 0 m. 35 ſ. de l'Equateur, l'arc E♈ étoit de 40 deg. 59 min. 25 ſec. & puiſque l'arc ♈D eſt donné de 28 deg. 16 min. 27 ſec. l'arc total E♈D, & par conſéquent
(a) N. 196. l'angle αPZ dont (*a*) cet arc eſt la meſure, étoient chacun de 69 deg. 15 min. 52 ſec.

Ainſi, dans le triangle-Sphérique obliquangle αPZ, on connoît l'angle αPZ de 69 deg. 15 min. 52 ſec. puiſque l'on vient de le trouver de cette grandeur : le côté αP de 67 deg. 44 min. 11 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la déclinaiſon Dα qui eſt donnée de 22 deg. 15 min. 49 ſec. avec le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la hauteur OP du Pôle P qui eſt auſſi donnée de 48 deg. 50 min. 10 ſec.
(b) N. 297. Par conſéquent, ſi l'on ſuppoſe (*b*) un arc ZM d'un grand cercle, tiré du ſommet de l'angle Z perpendiculairement au côté αP, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZPα & ZαP ſont de même eſpece,) on cherche de la maniére ſuivante le côté Zα qui eſt le complément de la hauteur demandée αC.

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MZP qui [c] eſt rectangle en M, on connoît l'angle MPZ, ou αPZ, que l'on vient de trouver de

69 deg. 15 min. 52 sec. avec l'hypoténuse PZ que l'on vient aussi de trouver de 41 deg. 9 m. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le segment MP. (*a*) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle MPZ *trouvé de* 69 *deg.* 15 *min.* 52 *sec.*	0.4509290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PZ *trouvée de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*	10.0585290
Logarithme de la tangente du compl. du segment MP	10.5092580

qui (*b*) donne 72 deg. 47 min. 59 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 17 deg. 12 min. 1 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté ♃P, que l'on a trouvé de 67 deg. 44 min. 11 sec. laisse 50 deg. 32 m. 10 sec. pour la valeur du segment ♃M. (*b*) N. 103.

2^ent^, dans le triangle-Sphérique obliquangle ♃ZP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 17 deg. 12 min. 1 sec. le segment ♃M que l'on vient aussi de trouver de 50 deg. 32 min. 10 sec. avec le côté PZ que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), le côté Z♃. (*c*) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MP *trouvé de* 17 *deg.* 12 *min.* 1 *sec.* - - - - - - - - - - - - - -	0.0198708
Logarithme du sinus du complément du segment ♃M *trouvé de* 50 *deg.* 32 *min.* 10 *sec.* - - - -	9.8031782
Logarithme du sinus du complément du côté PZ *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément du côté Z♃ -	19.6997459

qui (*d*) donne 30 deg. 3 min. 33 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la hauteur demandée ♃C, puisque cette hauteur est ce complément même. (*d*) N. 103.

SCHOLIE.

433. *C'est par ce qui est enseigné dans cet Usage, que l'on a construit de la maniére suivante, la Table des Réfractions qui est à la fin de ce Traité.*

On a choisi l'une des Etoiles fixes qui passent le plus près du Zénith; parce que les réfractions étant d'autant plus petites que l'objet dont on observe la hauteur est plus élevé sur l'horison, on a pû prendre la hauteur méridienne apparente de l'Etoile que l'on avoit choisie, pour sa vraie hauteur méridienne, & en déduire sa
(a) N. 333. *déclinaison (a), sans craindre que la différence qui s'est trouvée entre ces deux hauteurs, ait causé dans cette déclinaison aucune erreur sen-*
(b) N. 399. *sible. On a aussi cherché (b) l'ascension droite de cette Etoile; & après avoir reglé une Pendule à secondes sur le vrai mouvement du Soleil, on a observé l'instant auquel cette Etoile a paru être à l'horison, celui auquel elle a paru être élevée d'un degré sur cet horison, celui auquel elle a paru y être élevée de deux degrés, & ainsi de suite, jusqu'à l'instant auquel elle a paru y être élevée de 90 degrés. On a ensuite cherché de la même maniére dont nous venons de le faire dans cet Usage, quelle devoit être la vraie hauteur de cette Etoile à chacun de ces instans. Enfin, on a retranché ces vraies hauteurs de ces hauteurs apparentes, chacune de chacune; & les différences ont formé la Table que l'on trouve à la fin de ce Traité.*

XXVII. USAGE.

434. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec l'ascension droite & la déclinaison d'une Etoile, trouver l'*Azimuth *de cette Etoile à un certain instant; c'est-à-dire, l'angle que le Vertical de cette Etoile forme à ce certain instant avec le Méridien de ce lieu.*

On donne l'ascension droite ♈QSED * de la *Tête d'Hercule* marquée α dans *Bayer*, de 255 deg. 48 min. 36 sec. avec la déclinaison Dα de cette Etoile de 14 deg. 41 min. vers le septentrion; & il faut trouver l'angle CZH que le vertical ZC de cette même Etoile formoit avec le Méridien HZO de Paris, le 14. du mois de Mai de l'année 1749, à 10 heures du soir. * Fig. 196.

Solution. Après avoir trouvé de la même maniére dont on l'a fait dans l'Usage précedent (a), que le 14. du mois de Mai de l'année 1749, l'ascension droite ♈QS du Soleil étoit à 10 heures du soir, de 51 deg. 42 min. 55 sec. on ajoûte cette ascension à l'arc SE qui est de 150 deg. puisque l'heure donnée est 10 heures du soir; & l'on a 201 deg. 42 min. 55 sec. pour le point E de l'Equateur qui étoit au Méridien à l'instant proposé. Mais, puisque l'arc ♈QSE est de 201 deg. 42 min. 55 sec. & que l'arc ♈QSED qui est l'ascension droite de l'Etoile proposée, est donné de 255 deg. 48 min. 36 sec. l'arc ED, & par conséquent l'angle αPZ dont (b) cet arc est la mesure, sont chacun de 54 deg. 5 min. 41 sec.

(a) N. 432.

(b) N. 196.

Ainſi, dans le triangle-Sphérique obliquangle αPZ, on connoît l'angle αPZ de 54 d. 5 m. 41 ſec. puiſque l'on vient de trouver cet angle de cette grandeur : le côté αP de 75 deg. 19 min. puiſque ce côté eſt le complément de la déclinaiſon Dα qui eſt donnée de 14 deg. 41 min. avec le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 ſec. puiſque ce côté eſt le complément de la hauteur OP du Pôle P ſur l'horiſon de Paris, qui eſt de 48 deg. 50 min. 10 ſec. Par conſéquent, après
(a) N. 297. avoir ſuppoſé (*a*) un arc αM d'un grand cercle, tiré du ſommet de l'angle α perpendiculairement au côté PZ, (prolongé vers M, parce que les angles αPZ & αZP ſont de différente eſpece,) on cherche de la maniére ſuivante l'angle demandé αZM, ou CZH.

1ent, dans le triangle-Sphérique αPM qui [c] eſt rectangle en M, on connoît l'angle αPM, ou αPZ, que l'on vient de trouver de 54 deg. 5 min. 41 ſec. avec l'hypoténuſe αP que l'on vient auſſi de trouver de 75 deg. 19 min. Ainſi,
(b) N. 284. l'on cherche de la maniére ſuivante (*b*), le ſegment MZP.

Complément du logarithme du ſinus du complément de l'angle αPM *trouvé de 54 deg. 5 min. 41 ſec.*	0.2317713
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuſe αP *trouvée de 75 deg. 19 min.* - - -	9.4183580
Logarithme de la tangente du complément du ſegment MZP - - - - - - - - - - - - -	9.6501293

(c) N. 103. qui (*c*) donne 24 deg. 4 min. 33 ſec. pour la valeur de ce complément ; & par conſéquent, 65 deg. 55 min. 27 ſec. pour celle de ce ſegment ; de laquelle ayant retranché le côté PZ, que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 ſec. il reſte 24 deg. 45 min. 37 ſec. pour la valeur du ſegment MZ.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle Z☉P, on connoît le ſegment MZ que l'on vient de trouver de 24 deg. 45 min. 37 ſec. le ſegment MZP que l'on vient auſſi de trouver de 65 deg. 55 min. 27 ſec. avec l'angle ☉PZ que l'on a trouvé de 54 deg. 5 min. 41 ſec. Ainſi, l'on cherche de la maniére ſuivante (*a*), l'angle demandé ☉ZM, ou CZH. (*a*) N. 317.

Complément du logarithme du ſinus du ſegment MZ *trouvé de* 24 *deg.* 45 *min.* 37 *ſec.* - - - - .	0.3779699
Logarithme du ſinus du ſegment MZP *trouvé de* 65 *deg.* 55 *min.* 27 *ſec.* - - - - - - - - -	9.9604738
Logarithme de la tangente de l'angle ☉PZ *trouvé de* 54 *deg.* 5 *min.* 41 *ſec.* - - - - - - -	10.1402496
Logarithme de la tangente de l'angle demandé ☉ZM, *ou* CZH - - - - - - - - - - - - -	20.4786933

qui (*b*) donne 71 deg. 37 min. 38 ſec. pour la valeur de cet angle. (*b*) N. 103.

SCHOLIE.

435. *Si au lieu de donner, comme on le fait dans cet Uſage, l'aſcenſion droite* ♈QSED * *d'une Etoile, avec le jour & l'heure, on donnoit ſeulement la hauteur* OP *du Pôle* P *ſur l'horiſon* HO, *avec la hauteur* C☉ *de cette Etoile ſur le même horiſon, & ſa déclinaiſon* D☉; *on connoitroit tous les côtés du triangle-Sphérique* ☉PZ, *puiſque ces côtés ſeroient les compléments des choſes données. Ainſi, l'on trouveroit l'angle* ☉ZP *de la maniére dont nous avons dit* (*c*) *qu'il falloit s'y prendre pour trouver les angles d'un triangle-Sphérique dont tous les côtés étoient connus;* & * Fig. 190. (*c*) N. 293.

lorsque l'on auroit trouvé cet angle αZP, *on connoîtroit aussi l'angle demandé* CZH, *puisque cet angle demandé est le supplément de cet angle* αZP.

XXVIII. Usage.

436. *Connoissant les longitudes de deux Etoiles avec leurs latitudes, trouver la distance de ces deux Etoiles.*

* Fig. 191. On donne la longitude ♈C * de l'Etoile A, de 20 deg. 12 min. avec sa latitude CA de 34 deg. 20 min. vers le septentrion. On donne pareillement la longitude ♈D de l'Etoile B, de 125 deg. 44 min. avec sa latitude DB de 5 deg. 36 min. aussi vers le septentrion; & il faut trouver la distance AB de ces deux Etoiles.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obliquangle AIB, on connoît le côté AI de 55 deg. 40 min. puisque ce côté est le complément de la latitude CA de l'Etoile A, qui est donnée de 34 deg. 20 min. le côté BI de 84 deg. 24 min. puisque ce côté est le complément de la latitude DB de l'Etoile B, qui est donnée de 5 deg. 36 min. avec l'angle AIB, ouCID, de
(a) N. 196. 105 deg. 32 min. puisque l'arc CD, qui (a) est la mesure de cet angle, est la différence de la longitude ♈C de l'Etoile A, qui est donnée de 20 deg. 12 min. à la longitude ♈D de l'Etoile B, qui est aussi donnée de 125 deg. 44 min.
(b) N. 297. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc AFM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle A perpendiculairement

perpendiculairement au côté BI, (prolongé vers M, parce que les angles ABI & AIB sont de differente espece,) on cherche de la maniére suivante le côté AB qui est la distance demandée.

1ent, dans le triangle-Sphérique MFAI qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse AI de 55 deg. 40 min. puisque l'on vient de la trouver de cette grandeur : avec l'angle AIM de 74 deg. 28 min. puisque cet angle est le supplément de l'angle AIB que l'on vient aussi de trouver de 105 deg. 32 min. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (a), le segment IM. (a) N. 184.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle AIM trouvé de 74 deg. 28 min. -	0.5721911
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AI trouvée de 55 deg. 40 min. - -	9.8344249
Logarithme de la tangente du complément du segment IM - - - - - - - - - - - - - - -	10.4066160

qui (b) donne 68 deg. 35 min. 26 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 21 deg. 24 min. 34 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant ajoûtée au côté BI, que l'on a trouvé de 84 deg. 24 min. donne 105 deg. 48 min. 34 sec. pour la valeur du segment BIM. (b) N. 103.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle BAI, on connoît le segment IM que l'on vient de trouver de 21 deg. 24 min. 34 sec. le segment BIM que l'on vient aussi de trouver de 105 deg. 48 min. 34 sec. avec le côté AI que l'on a trouvé de 55 deg. 40 min. Ainsi,

(a) N. 303. l'on cherche de la maniére ſuivante (*a*), le côté AB qui eſt la diſtance demandée.

Complément du logarithme du ſinus du complément du ſegment IM *trouvé de* 21 *deg.* 24 *min.* 34 *ſec.*	0.0310524
Logarithme du ſinus du complément du ſegment BIM *trouvé de* 105 *deg.* 48 *min.* 34 *ſec.* - - -	9.4352689
Logarithme du ſinus du complément du côté AI *trouvé de* 55 *deg.* 40 *min.* - - - - - - -	9.7512842
Logarithme du ſinus du complément de la diſtance demandée AB - - - - - - - - - - - -	19.2176055

(b) N. 103. qui (*b*) donne 9 deg. 30 min. *p. m.* pour la valeur de ce complément; & par conſéquent, 99 deg. 30 min. pour celle
(c) N. 236. de cette diſtance, qui (*c*) vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle; puiſqu'elle eſt l'hypoténuſe d'un triangle-Sphérique rectangle ABM, dont l'un des côtés BIM vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre AFM vaut moins que ce quart.

AUTRE EXEMPLE.

437. *On donne pour les longitudes & pour*
Fig. 191. *les latitudes des Etoiles* A * *&* b *les mêmes nombres que l'on a donnés pour celles des Etoiles de l'exemple précedent, excepté que la latitude* Db *de l'Etoile* b *eſt méridionale; & il faut trouver la diſtance* Ab *de ces deux Etoiles.*

Solution. 1^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle AI*b*, on connoît le côté AI de 55 deg. 40 min. le côté *b*I de 95 d. 36 m. avec l'angle AI*b* de 105 deg. 32 min. Ainſi, après avoir ſuppoſé un arc AFM d'un grand cercle, perpendiculaire au côté *b*I, & trouvé le ſegment IM de 21 d. 24 m. 34 ſec. de même & de la même maniére que dans l'exemple précedent, on ajoûte ce ſegment au côté *b*I, & l'on a

117 deg. 0 min. 34 sec. pour la valeur du segment *b*IM.

2^ent^, dans le triangle-Sphérique obliquangle *b*AI, on connoît le segment IM que l'on a trouvé de 21 d. 24 m. 34 sec. le segment *b*IM que l'on vient de trouver de 117 deg. 0 min. 34 sec. avec le côté AI que l'on a aussi trouvé de 55 deg. 40 min. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*a*), le côté A*b* qui est la distance demandée. (a) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment IM *trouvé de* 21 *deg.* 24 *min.* 34 *sec.*	0.0310524
Logarithme du sinus du complément du segment bIM *trouvé de* 117 *deg.* 0 *min.* 34 *sec.* - - - - -	9.6571872
Logarithme du sinus du complément du côté AI *trouvé de* 55 *deg.* 40 *min.* - - - - - - - -	9.7512842
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée Ab - - - - - - - - - - - - -	19.4395238

qui (*b*) donne 15 deg. 58 min. 9 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 105 deg. 58 min. 9 sec. pour celle de cette distance, qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, par des raisons pareilles à celles que nous avons dites à la fin de l'exemple précedent. (b) N. 103.

SCHOLIE.

438. *C'est par une méthode entiérement pareille à celle que nous venons de suivre dans cet Usage, que l'on trouve la distance de deux Villes dont on connoît les latitudes & les longitudes.*

Ainsi, si l'on sçait, par exemple, que la longitude EC * *de* Paris *est de* 20 *deg. & sa latitude* CP *de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. vers le septentrion; & que la longitude* ED *de* Goa *est* * Fig. 132.

de 91 deg. 25 min. & sa latitude DG *de 15 deg. 31 min. aussi vers le septentrion ; on trouve de la maniere suivante, la distance* PG *de ces deux Villes.*

(a) N. 297. 1ent *Après avoir supposé (a) un arc* PM *d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle* P *perpendiculairement au côté* GN, (*qu'il rencontre en un point* M, *parce que les angles* PNG *&* PGN *sont de même espece,*) *on a un triangle sphérique* MPN *qui* [c] *est rectangle en* M, *& dans lequel on connoît l'hypoténuse* PN *de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque cette hypoténuse est le complément de la latitude* CP *de* Paris, *qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'angle* PNM, *ou* CND, *de 71 deg. 25 min.*
(b) N. 196. *puisque cet angle a pour mesure (b) la différence* CD *de la longitude* EC *de* Paris, *qui est donnée de 20 deg. à la longitude* ED *de* Goa, *qui est aussi donnée de 91 deg 25 min. Ainsi, l'on cherche*
(c) N. 284. *de la maniere suivante (c), le segment* MN.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle PNM trouvé de 71 deg. 25 m.	0.4966403
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PN trouvée de 41 deg. 9 m. 50 s.	10.0583290
Logarithme de la tangente du complément du segment MN - - - - - - - - - - - -	10.5549693

(d) N. 103. *qui (d) donne 74 deg. 25 min. 50 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 15 deg. 34 min. 10 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant retranchée du côté* GN, *qui est de 74 deg. 29 min. puisqu'il est le complément de la latitude* DG *de* Goa, *qui est donnée de 15 deg. 31 min. laisse 58 deg. 54 min. 50 sec. pour la valeur du segment* GM.

2ent, *dans le triangle-Sphérique obliquangle* GPN, *on connoît le segment* MN *que l'on vient de trouver de* 15 *deg.* 34 *min.* 10 *sec, le segment* GM *que l'on vient aussi de trouver de* 58 *deg.* 54 *min.* 50 *sec. avec le côté* PN *que l'on a trouvé de* 41 *deg.* 9 *min* 50 *sec. Ainsi, l'on cherche de la maniere suivante* (a), *le côté* PG *qui est la distance demandée.* (a) N. 393.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 15 deg. 34 min. 10 sec. - - - - - - - - - - - - - - -	0.0162358
Logarithme du sinus du complément du segment GM trouvé de 58 deg. 54 min. 50 sec. -	9.7129238
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PG - - - - - - - - - - - -	19.6058565

qui (b) *donne* 23 *deg.* 47 *min.* 52 *sec.* ½ *pour la valeur de ce complément ; & par conséquent ,* 66 *deg.* 12 *min.* 7 *sec.* ½, *ou* 1655 *lieues* p. p. *de* 25 *au degré, pour la valeur de cette distance.* (b) N. 103.

439. *Et si l'on proposoit de trouver la distance* PL* *de* Paris *à* Lima *Capitale du Pérou,* *dont la longitude* AQED *est de* 300 *deg.* 50 *min.* 30 *sec. & la latitude* DL *de* 12 *deg.* 1 *min.* 15 *sec. vers le midi; on supposeroit* (c) *de même que dans l'exemple précédent, un arc* PM *d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle* P *perpendiculairement au côté* LDN, (*qu'il rencontreroit aussi en un point* M, *parce que les angles* PNL *&* PLN *seroient encore de même espece,*) *& l'on trouveroit ensuite de la maniere suivante, la distance demandée* PL.

* Fig. 193.

(c) N. 297.

1ent *Dans le triangle-Sphérique* MPN *qui* [c] *seroit rectangle en* M, *on connoîtroit l'hypoténuse* PN *de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. puisque cette hypoténuse seroit le complément de la latitude* CP *de* Paris, *qui est de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. avec l'angle* MNP, *ou* DNC, *de* 79 *deg.* 9 *min.*
(a) N. 196. 30 *sec. puisque* (a) *cet angle auroit pour mesure la somme* DAC *de la longitude* AC *de* Paris, *qui est de* 20 *deg. & de la différence* DA *de la longitude* AQED *de* Lima, *qui est de* 300 *deg.* 50 *min.* 30 *sec. à la circonférence entiére de l'Equateur* EQ. *Ainsi, l'on trouveroit de la ma-*
(b) N. 284. *niére suivante* (b), *le segment* MN.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle MNP trouvé de 79 deg. 9 min. 30 sec. - - - - - - - - - - - - - -	0,7256215
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PN trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec.	10.0583290
Logarithme de la tangente du complément du segment MN - - - - - - - - - - - - -	10.7839505

(c) N. 103. *qui* (c) *donneroit* 80 *deg.* 39 *min.* 39 *sec.* p. p. *pour la valeur de ce complément; & par conséquent*, 9 *deg.* 20 *min.* 21 *sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté* LDN, *que l'on trouveroit de* 102 *deg.* 1 *min.* 15 *sec. puisque ce côté seroit la somme du quart de cercle* DN *& de la latitude* DL *de* Lima, *laquelle est de* 12 *deg.* 1 *min.* 15 *sec. laisseroit* 92 *deg.* 40 *min.* 54 *sec. pour la valeur du segment* LDM.

2ent, *dans le triangle-Sphérique obliquangle* LPN, *on connoîtroit le segment* MN *que l'on viendroit de trouver de* 9 *deg.* 20 *min.* 21 *sec. le segment* LDM *que l'on viendroit aussi de trouver de* 92 *deg.* 40 *min* 54 *sec. avec le côté* PN *que l'on auroit trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*

2^ent, *dans le triangle-Sphérique obliquangle* GPN, *on connoît le segment* MN *que l'on vient de trouver de* 15 *deg.* 34 *min.* 10 *sec, le segment* GM *que l'on vient aussi de trouver de* 58 *deg.* 54 *min.* 50 *sec. avec le côté* PN *que l'on a trouvé de* 41 *deg.* 9 *min* 50 *sec. Ainsi, l'on cherche de la maniere suivante* (a), *le côté* PG *qui est la distance demandée.* (a) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 15 deg. 34 min. 10 sec. - - - - - - - - - - - - - - -	0.0162358
Logarithme du sinus du complément du segment GM trouvé de 58 deg. 54 min. 50 sec. -	9.7129238
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PG - - - - - - - - - - -	19.6058565

qui (b) *donne* 23 *deg.* 47 *min.* 52 *sec.* ½ *pour la valeur de ce complément; & par conséquent,* 66 *deg.* 12 *min.* 7 *sec.* ½, *ou* 1655 *lieues* p. p. *de* 25 *au degré, pour la valeur de cette distance.* (b) N. 103.

439. *Et si l'on proposoit de trouver la distance* PL* *de* Paris *à* Lima *Capitale du Pérou,* *dont la longitude* AQED *est de* 300 *deg.* 50 *min.* 30 *sec. & la latitude* DL *de* 12 *deg.* 1 *min.* 15 *sec. vers le midi; on supposeroit* (c) *de même que dans l'exemple précédent, un arc* PM *d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle* P *perpendiculairement au côté* LDN, (*qu'il rencontreroit aussi en un point* M, *parce que les angles* PNL *&* PLN *seroient encore de même espece,*) *& l'on trouveroit ensuite de la maniére suivante, la distance demandée* PL.

* Fig. 193.

(c) N. 297.

30 sec. & il faut trouver 1ent, le point B de ce cercle qui se leve en même temps que cette Etoile ; 2ent., l'angle FB♋ que ce même cercle forme à cet instant avec cet horison HO.

Solution. 1ent, dans le triangle-Sphérique αDF qui est rectangle en D, on connoît l'angle DFα, ou EFH, de 41 deg. 9 min. 50 sec. puis-
(a) N. 196. que (a) cet angle a pour mesure le complément HE de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec ; avec le côté Dα qui est donné de 16 deg. 23 min. 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniere sui-
(b) N. 277. vante (b), le côté DF qui est la différence ascensionnelle de l'Etoile proposée.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle DFα trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	0.0583290
Logarithme de la tangente du côté Dα donné de 16 deg. 23 min. 10 sec. - - - -	9.4684250
Logar. du sinus de la différence ascensionnelle DF	9.5267540

(c) N. 103. qui (c) donne 19 deg. 39 min. 10 sec. pour la valeur de cette différence ; laquelle étant ajoûtée a l'ascension droite ♈ED, qui est donnée de 98 deg. 31 min. 27 sec. donne 118 deg. 10 min. 37 sec. pour l'ascension oblique ♈EDF ; & par conséquent, 61 deg. 49 min. 23 sec. pour le côté F♎ du triangle-Sphérique obliquangle F♎B.

(d) N. 297. 2ent, aprèsavoir supposé (d) dans le triangle-Sphérique obliquangle F♎B, un arc ♎M d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle ♎ perpendiculairement au côté FB, (prolongé vers M, parce que les angles ♎BF & ♎FB sont de differente espece,) on connoît dans le triangle-Sphérique F♎M qui [c] est rectangle en M, l'hypoténuse

Ainsi, l'on trouveroit de la maniére suivante (a), le côté PL *qui seroit la distance demandée.* (a) N. 303.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 9 deg. 20 min. 21 sec. - - - - - - - - - - - - - -	0.0057951
Logarithme du sinus du complément du segment LDM trouvé de 92 deg. 40 min. 54 sec. - -	8.6701228
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PL - - - - - - - - - - - -	18.5526148

qui (b) donneroit 2 deg. 2 min. 44 sec. p. p. *pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 92 deg. 2 min. 44 sec.* †, *ou* 2301 *lieues* p. p. *de 25 au degré, pour la valeur de cette distance.* (b) N. 103.

XXIX. USAGE.

440. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec l'ascension droite d'une Etoile, sa déclinaison, & l'obliquité de l'Ecliptique ; trouver le point de ce cercle qui se leve en même temps que cette Etoile, & l'angle que ce même cercle forme à cet instant avec cet horison.*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. l'ascension droite ♈ED de *Sirius*, de 98 deg. 31 min. 27 sec. sa déclinaison Dα de 16 deg. 23 min. 10 sec. vers le midi : avec l'obliquité FæB de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. * Fig. 194.

† Cette distance est de plus du quart de la circonférence d'un cercle (c) ; puisqu'elle est l'hypoténuse d'un triangle-Sphérique rectangle LPM, dont le côté LM vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & le côté PM vaut moins que ce quart. (c) N. 236.

30 sec. & il faut trouver 1ent, le point B de c
cercle qui se leve en même temps que cet
Etoile; 2ent., l'angle FB♋ que ce même cerc
forme à cet instant avec cet horison HO.

Solution. 1ent, dans le triangle-Sphériqu
♎DF qui est rectangle en D, on connoît l'angl
DF♎, ou EFH, de 41 deg. 9 min. 50 sec. puis
(a) N. 196. que (a) cet angle a pour mesure le complé-
ment HE de la hauteur OP du Pôle P, qu
est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec; avec
le côté D♎ qui est donné de 16 deg. 23 min
10 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniere sui-
(b) N. 277. vante (b), le côté DF qui est la différence ascen-
sionnelle de l'Etoile proposée.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle DF♎ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	0.0583294
Logarithme de la tangente du côté D♎ donné de 16 deg. 23 min. 10 sec. - - - -	9.4684250
Logar. du sinus de la différence ascensionnelle DF	9.5267540

(c) N. 103. qui (c) donne 19 deg. 39 min. 10 sec. pour la valeur de cette différence; laquelle étant ajoûtée a l'ascension droite ♈ED, qui est donnée de 98 deg. 31 min. 27 sec. donne 118 deg. 10 min. 37 sec. pour l'ascension oblique ♈EDF; & par conséquent, 61 deg. 49 min. 23 sec. pour le côté F♎ du triangle-Sphérique obliquangle F♎B.

(d) N. 297. 2ent, aprèsavoir supposé (d) dans le triangle-
Sphérique obliquangle F♎B, un arc ♎M d'un
grand cercle, tiré du sommet de l'angle ♎ per-
pendiculairement au côté FB, (prolongé vers
M, parce que les angles ♎BF & ♎FB sont de
differente espece,) on connoît dans le trian-
gle-Sphérique F♎M qui [c] est rectangle en M,
l'hypotenuse

l'hypoténuse F♎ que l'on vient de trouver de 61 deg. 49 min. 23 sec. avec l'angle ♎FM qui (*a*) est égal à l'angle EFH que l'on a trouvé de 41 degré 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniere suivante (*b*), l'angle F♎M.

(*a*) N. 199.
(*b*) N. 283.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse F♎ *trouvée de* 61 *deg.* 49 *min.* 23 *sec.* - - - -	0.3258776
Logar. de la tangente du complément de l'angle ♎FM *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - -	10.0583290
Logar. de la tangente de l'angle F♎M - - -	10.3842066

qui (*c*) donne 67 deg. 34 min. pour la valeur de cet angle; de laquelle ayant retranché l'angle F♎B, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 44 deg. 5 min. 30 sec. pour la valeur de l'angle B♎M.

(*c*) N. 103.

3^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle F♎B, on connoît l'angle au sommet F♎M que l'on vient de trouver de 67 deg. 34 min. l'autre angle au sommet B♎M que l'on vient aussi de trouver de 44 degré 5 min. 30 sec. avec le côté F♎ que l'on a trouvé de 61 deg. 49 min. 23 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*d*), l'autre côté B♎.

(*d*) N. 305.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle F♎M *trouvé de* 67 *deg.* 34 *min.* -	0.4183823
Logar. du sinus du complément de l'angle B♎M *trouvé de* 44 *deg.* 5 *min.* 30 *sec.* - - - -	9.8562620
Logar. de la tangente du complément du côté F♎ *trouvé de* 61 *deg.* 49 *min.* 23 *sec.* - - - -	9.7289032
Logar. de la tang. du complément du côté B♎ -	20.0035475

qui (*e*) donne 45 deg. 14 min. 2 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 44 deg. 45 min. 58 sec. pour

(*e*) N. 103.

celle de ce côté ; laquelle étant retranchée de la moitié ♈♋♎ de la circonférence de l'Ecliptique, laisse 135 deg. 14 min 2 sec. ou le 15me deg. 14 min. 2 sec. du ♌, pour le point B de ce cercle, qui se leve en même temps que l'Etoile proposée.

4ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle F♎B, on connoît le côté B♎ que l'on vient de trouver de 44 deg. 45 min. 58 sec. le côté F♎ que l'on a trouvé de 61 degrés 49 min. 23 sec. avec l'angle ♎FB, ou ♎FM, que l'on a aussi trouvé de 41 deg. 9 minutes 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére sui-
(a) N. 289. vante (a), l'angle ♎BF.

Complément du logarithme du sinus du côté B♎ *trouvé de* 44 *deg.* 45 *min.* 58 *sec.* - - -	0.1522952
Logar. du sinus du côté F♎ *trouvé de* 61 *deg.* 49 *min.* 23 *sec.* - - - - -	9.9452191
Logarithme du sinus de l'angle ♎FB *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - -	9.8183678
Logar. du sinus de l'angle ♎BF - - - -	19.9158821

(b) N. 103. qui (b) donne 124 deg. 31 min. 17 sec. pour la valeur de cet angle, qui est obtus ; & par conséquent, 55 deg. 28 min. 43 sec. pour celle de l'angle FB♋ que l'Ecliptique forme avec l'horison.

SCHOLIE I.

441. *Si en supposant les mêmes choses que l'on vient de donner dans cet usage, (exceptés l'ascension droite que l'on change en descension*
* Fig. 195. *droite,) on propose de trouver le point* B* *de l'Ecliptique qui se couche en même temps que l'Etoile proposée* ✶, *& l'angle* FB♋ *que ce cercle forme à cet instant avec l'horison* HO ; *alors*,

après avoir trouvé la différence descensionnelle DF, *de* 19 *deg.* 39 *min.* 10 *sec. de la même manière dont on a trouvé dans cet Usage la différence ascensionnelle* DF (fig. 194.), *on retranche cette différence descensionnelle de la descension droite* ♈FD *qui est donnée de* 98 *deg.* 31 *min.* 27 *sec. & le reste* 78 *deg.* 52 *min.* 17 *sec. est la valeur de la descension oblique de l'Etoile proposée, c'est-à-dire, la valeur du côté* F♈ *du triangle-Sphérique obliquangle* F♈B.

Or, si l'on suppose (a) *un arc* ♈M *d'un grand* (a) N.297. *cercle, tiré du sommet de l'angle* ♈ *perpendiculairement au côté* FB, (*prolongé vers* M, *parce que les angles* ♈BF *&* ♈FB *sont de différente espece,*) *on connoît dans le triangle-Sphérique* F♈M *qui* [c] *est rectangle en* M, *l'hypoténuse* F♈ *que l'on vient de trouver de* 78 *deg.* 52 *min.* 17 *sec. avec l'angle* ♈FM *qui* (b) *est égal à* (b) N.199. *l'angle* HFE ; *c'est-à-dire, au complément* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. de la hauteur* OP *du Pôle* P, *qui est donnée de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante* (c) (c) N.283. *l'angle* F♈M.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse F♈ trouvée de 78 deg. 52 min. 17 sec. - - - -	0.7144159
Logarithme de la tangente du complément de l'angle ♈FM trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	10.0583290
Logar. de la tangente de l'angle F♈M - - -	10.7727449

qui (d) *donne* 80 *deg.* 25 *min.* 17 *sec. pour la valeur de cet* (d) N. 103.

angle; de laquelle ayant retranché l'angle F♈B, *qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 56 deg. 56 min. 47 sec. pour la valeur de l'angle* B♈M.

Ainsi, dans le triangle-Sphérique obliquangle F♈B, *on connoît l'angle au sommet* F♈M, *que l'on vient de trouver de* 80 *deg.* 25 *m.* 17 *s. l'autre angle au sommet* B♈M *que l'on vient aussi de trouver de* 56 *deg.* 56 *min.* 47 *sec. avec le côté* F♈ *que l'on a trouvé de* 78 *deg.* 52 *min.* 17 *sec. Par consequent, on cherche*
(a) N. 305. *de la maniére suivante (a), l'autre côté* B♈.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle F♈M trouvé de 80 deg. 25 m. 17 sec. - - - - - - -	0.7788451
Logarithme du sinus du complément de l'angle B♈M trouvé de 56 deg. 56 min. 47 sec. -	9.7367338
Logarithme de la tangente du complément du côté F♈ trouvé de 78 deg. 52 min. 17 sec. -	9.2938281
Logar. de la tangente du compl. du côté B♈ -	19.8094070

(b) N. 103. *qui (b) donne 32 deg. 48 min. 46 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 57 deg. 11 min. 14 sec. ou le 27me deg. 11 min. 14 sec. du* ♉, *pour le point* B *de l'Ecliptique qui se couche en même temps que l'Etoile proposée.*

Enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle F♈B, *on connoît le côté* B♈ *que l'on vient de trouver de* 57 *deg.* 11 *min.* 14 *sec. le côté* F♈ *que l'on a trouvé de* 78 *deg.* 52 *min.* 17 *sec. avec l'angle* ♈FB, *ou* ♈FM, *que l'on a aussi trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec. Ainsi,*
(c) N. 289. *l'on cherche de la maniére suivante (c), l'angle* FB♈.

Complément du logarithme du sinus du côté B♈ trouvé de 57 deg. 11 min. 14 sec. - - -	0.0754903
Logarithme du sinus du côté F♈ trouvé de 78 deg. 52 min. 17 sec - - -	9.9917559
Logarithme du sinus de l'angle ♈FB trouvé de 41 deg. 9 min. 30 sec. - - -	9.8183678
Logarithme du sinus de l'angle FB♈ - - -	19.8856140

qui (a) donne 129 deg. 47 min. 8 sec. pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, 50 deg. 12 min. 52 sec. pour celle de l'angle FB♋ que l'Ecliptique forme avec l'horison. (a) N. 103.

SCHOLIE II.

442. *Si l'on cherche dans quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. de* Cassini, *le jour auquel le Soleil sera au* 15me *degré du* ♌, *on trouvera que ce jour sera le* 8me *du mois d'Août, de l'année* 1749. *Ainsi, le 8 du mois d'Août de cette année*, Sirius *se levera* † *environ en même temps que le Soleil. Et comme on trouvera dans les mêmes Ephémérides, ou par les mêmes Tables, que le Soleil sera au degré opposé, qui est le* 15me *du* ♒, *le 4. du mois de Février de l'année suivante, le 4. du mois de Février de l'année* 1750. Sirius *se levera environ au même instant auquel le Soleil se couchera.*

† Lorsqu'un Astre se leve en même temps que le Soleil, le lever de cet Astre se nomme *lever Cosmique*, ou *du matin*. Mais, lorsqu'un Astre se leve à l'instant auquel le Soleil se couche, le lever de cet Astre se nomme alors *Lever Acrônique*, ou *du soir*. Pareillement, lorsqu'un Astre se couche à l'instant auquel le Soleil se leve, le coucher de cet Astre se nomme *Coucher Cosmique*; & lorsqu'un Astre se couche en même temps que le Soleil, alors le coucher de ce même Astre se nomme *Coucher Acrônique*.

Si l'on cherche pareillement le jour auquel le Soleil sera au 27me degré du ♉, on trouvera que ce jour sera le 18me du mois de Mai de l'année 1749. Ainsi, le 18. du mois de Mai de cette année, Sirius *se couchera environ en même temps que le Soleil. Mais, comme le Soleil sera au degré opposé, qui est le 27me du ♏, le 19. du mois de Novembre de la même année, le 19. de Novembre de cette même année*, Sirius *se couchera environ au même instant auquel le Soleil se levera.*

XXX. USAGE.

443. *Connoissant le point de l'Ecliptique avec lequel une Etoile se leve, & l'angle que ce cercle forme à cet instant avec l'horison, trouver le point de ce même cercle auquel le Soleil doit être, afin que cette Etoile se léve* † Héliaquement.

† On dit d'un Astre qu'il se *leve Héliaquement*, lorsqu'après avoir été pendant quelque temps immergé dans les rayons du Soleil, il commence à pouvoir être apperçu à l'horison Oriental, un peu avant le lever du Soleil; & au contraire, qu'il se *couche Héliaquement*, lorsqu'étant prêt à s'enfoncer dans les rayons du Soleil, on l'entrevoit cependant encore à l'horison Occidental, un peu après le coucher du Soleil. Mais il faut remarquer que tous les Astres ne demandent pas une même distance du Soleil pour pouvoir être vus. Suivant *Kepler* ¶, on commence à distinguer les Etoiles de la premiére grandeur, lorsqu'elles sont éloignées du Soleil de 12 degrés; & celles de la derniére, lorsqu'elles en sont éloignées de 18. Saturne n'exige que 11 deg. de distance; Jupiter 10; Mars 11 $\frac{1}{2}$; Venus 5. & M. De la Hire assure même avoir vû cette derniére Planete, dans des temps ausquels elle n'étoit pas éloignée du Soleil de plus d'un degré.

¶ Copernic. Epit. Lib. 3. fol. 364.

Le point B* de l'Ecliptique qui se leve en même temps que *Sirius*, est le 15me deg. 14 min. 2 sec. du ♌ (a); l'angle FB♋ que ce cercle forme avec l'horison HO, est de 55 deg. 28 m. 43 sec. & il faut trouver le point C de ce même cercle auquel le Soleil doit être, afin que cette Etoile se léve héliaquement. * Fig. 196. (a) N. 448.

Solution. Après avoir supposé qu'un cercle vertical ZGC vient rencontrer l'Ecliptique à 12 degrés au dessous de l'horison HO, (qui est la profondeur que le Soleil doit avoir, afin que l'Etoile proposée qui est de la premiére grandeur, puisse être apperçue,) on a un triangle-Sphérique BCG qui [c] est rectangle en G; & dans lequel on connoît le côté GC de 12 d. puisque ce côté est la mesure de cette profondeur supposée; avec l'angle CBG de 55 deg. 28 min. 43 sec puisque (b) cet angle est égal à l'angle FB♋ qui est donné de cette grandeur. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), l'hypoténuse BC. (b) N. 199. (c) N. 264.

Complément du logar. du sinus de l'angle CBG *trouvé de 55 deg. 28 min. 43 sec.* - - - -	0.0841178
Logar. du sinus du côté GC *supposé de 12 deg.*	9.3178789
Logar. du sinus de l'hypoténuse BC - - - -	9.4019967

qui (d) donne 14 deg. 36 min. 59 sec. pour la valeur de cette hypoténuse; laquelle étant ajoûtée au 15me deg. 14 min. 2 sec. du ♌, donne le 29me deg. 51 min. 1 sec. du même signe, pour le point demandé. (d) N. 103.

SCHOLIE I.

444. *Si au lieu de demander le point de l'Ecliptique auquel le Soleil doit être afin que*

Sirius *se léve héliaquement, on propose au contraire de trouver celui auquel ce même Astre doit être afin que cette même Etoile se couche héliaquement; il faut alors connoître le point* B* *de l'Ecliptique qui se couche en même temps que* Sirius, *& l'angle* FB♋ *que ce même cercle forme à cet instant avec l'horison* HO. *Ainsi, en supposant que l'on ait trouvé pour ce point le* 27me *deg.* 11 *min.* 14 *sec. du* ♉; *&* 50 *deg.* 12 *min.* 52 *sec. pour la valeur de cet angle, (de même que dans la première Scholie du* 29me *Usage* (a), *& de la même manière dont on l'a fait dans cette Scholie,) on fera passer par le Zénith* Z *un cercle vertical* ZGC *qui vienne rencontrer l'Ecliptique à* 12 *degrés de profondeur au dessous de l'horison* HO. *Or par ce moyen, on aura un triangle-Sphérique* BCG *qui* [c] *sera rectangle en* G; *& dans lequel on connoîtra le côté* CG *de* 12 *deg. puisque ce côté sera la profondeur supposée, avec l'angle* CBG *de* 50 *deg.* 12 *min.* 52 *sec. puisque* (b) *cet angle est égal à l'angle* FB♋ *qui est donné de cette grandeur. Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante* (c), *l'hypoténuse* BC.

* Fig. 197.

(a) N. 441.

(b) N. 199.

(c) N. 264.

Complément du logar. du sinus de l'angle CBG trouvé de 50 deg. 12 min. 52 sec. - - - -	0.1143873
Logar. du sinus du côté CG supposé de 12 deg.	9.3178789
Logarithme du sinus de l'hypoténuse BC - -	9.4322662

(d) N. 103. *qui* (d) *donne* 15 *deg.* 41 *min.* 52 *sec.* p. m. *pour la valeur de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée du* 27me *deg* 11 *min.* 14 *sec. du* ♉, *laissera le* 11me *deg.* 29 *min.* 22 *sec. du même signe, pour le point demandé.*

SCHOLIE II.

SCHOLIE. II.

445. *Si l'on cherche dans quelques Ephémerides, ou par les Tables de M. de* Cassini*, *le jour auquel le Soleil sera au 29me degré du ♌, on trouvera que ce jour sera le vingt-deuxiéme du mois d'Août de l'année* 1749. *Ainsi, le 22 du mois d'Août de cette année*, Sirius *se levera héliaquement. Et comme on trouvera dans les mêmes Ephémerides, ou par les mêmes Tables, que le Soleil sera au 11me degré du ♉, le premier jour du mois de Mai de la même année, le premier du mois de Mai de l'année* 1749 Sirius *se couchera héliaquement.*

XXXI. USAGE.

446. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec celle d'une Planete quelconque sur le même horison, la distance de cette Planete au Méridien de ce lieu, & sa Parallaxe de hauteur; trouver les Parallaxes d'ascension droite & de déclinaison de cette même Planete.* †

† Suivant ce que nous avons dit à la Note du N° 330. une Planete étant vue de la surface de la Terre, paroît toujours moins élevée qu'elle ne l'est en effet; de maniére qu'à l'instant auquel on l'observe à un point du Ciel, par exemple T*, elle est à un point L d'autant plus élevé au dessus de ce point T, que la Planete dont il s'agit est moins éloignée de la Terre. Mais, puisqu'une Planete étant vue de la surface de la Terre, paroît être à un point du Ciel T, lorsqu'elle est à un point L plus près du Méridien HZO que n'est ce point T, l'ascension droite de cette Planete, son ascension oblique, sa descension droite, sa descension oblique, sa déclinaison, sa longitude & sa latitude, qui sont en effet celles du point L, * Fig. 198.

* Fig. 198. On donne la hauteur OP* du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. la vraie hauteur CL de la Lune L sur le même horison, de 50 deg. 12 min. sa distance D au méridien HZO, de 29 deg. 48 min. avec sa Parallaxe de hauteur LT, de 39 min. 8 s. Et il faut trouver la Parallaxe DB de l'ascension droite ♈QED de cette Planete, avec la Parallaxe FL de sa déclinaison DL qui est Septentrionale.

Solution. 1ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. le côté ZL de 39 deg. 48 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 50 deg. 12 min. avec l'angle LPZ, ou DPE,

doivent aussi paroître être celles de ce point T. Ainsi, il y a une difference de la vraie ascension droite d'une Planete à son ascension droite apparente, de sa vraie ascension oblique à son ascension oblique apparente, de sa vraie descension droite à sa descension droite apparente, de sa vraie descension oblique à sa descension oblique apparente, de sa vraie déclinaison à sa déclinaison apparente, de sa vraie longitude à sa longitude apparente, enfin, de sa vraie latitude à sa latitude apparente; & ces différences sont ce que l'on appelle les *Parallaxes* d'ascension droite, d'ascension oblique, de déclinaison &c. Or, on pourra voir par les exemples de cet Usage & du suivant, que la Parallaxe augmente les ascensions droites & les ascensions obliques, & diminue au contraire les descensions droites & les descensions obliques: qu'elle augmente les longitudes dans l'hemisphere Oriental, & les diminue au contraire dans l'hemisphere Occidental: enfin, qu'elle diminue les déclinaisons & les latitudes Septentrionales, & augmente au contraire les déclinaisons & les latitudes Méridionales.

de 29 deg. 48 min. puisque la distance DE de la même Planete, au méridien HZO, qui (a) est la mesure de cet angle, est donnée de cette grandeur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc ZM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LP, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZLP & ZPL sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante (c), l'angle PZM du triangle-Sphérique MZP qui [c] est rectangle en M. (a) N. 196. (b) N. 297. (c) N. 283.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse ZP *trouvée de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*	0.1233031
Logarithme de la tangente du complément de l'angle MPZ, *ou* LPZ, *trouvé de* 29 *deg.* 48 *min.*	10.2420687
Logarithme de la tangente de l'angle PZM - -	10.3653718

qui (d) donne 66 deg. 40 min. 36 sec. ½ pour la valeur de cet angle. (d) N. 103.

2^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 m. 50 sec. le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 39 deg. 48 min. avec l'angle au sommet PZM que l'on vient de trouver de 66 deg. 40 min. 36 sec. ½ Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (e), l'autre angle au sommet LZM. (e) N. 315.

Complément du logar. de la tangente du complément du côté ZP *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*	9.9416[illegible]
Logar. de la tangente du complément du côté ZL *trouvé de* 39 *deg.* 48 *min.* - - - - - - -	10.07926
Logar. du sinus du complément de l'angle PZM *trouvé de* 66 *deg.* 40 *min.* 36 *sec.* ½ - - -	9.5976559
Logar. du sinus du complément de l'angle LZM	29.6185940

qui (f) donne 24 deg. 33 m. 8 sec. *p. m.* pour la valeur de ce com- (f) N. 103.

plément; & par conséquent, 65 deg. 26 min. 52 sec. pour celle de cet angle; laquelle étant ajoûtée à l'angle PZM, que l'on a trouvé de 66 deg. 40 min. 36. sec. *p. p.* donne 132 deg. 7 min. 28 sec. pour la valeur de l'angle LZP.

3^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît l'angle LPZ que l'on a trouvé de 29 deg. 48 min. l'angle LZP que l'on vient de trouver de 132 deg. 7 min. 28 sec. avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 39 deg. 48 min. Ainsi, l'on cherche de
(a) N. 291. la maniére suivante (*a*), le côté LP.

Complément du logarithme du sinus de l'angle LPZ *trouvé de* 29 *deg.* 48 *min.* - - -	0.3036664
Logar. du sinus de l'angle LZP *trouvé de* 132 *deg.* 7 *min.* 28 *sec.* - - - - - - -	9.8702222
Logar. du sinus du côté ZL *trouvé de* 39 *deg.* 48 *min.*	9.8062544
Logarithme du sinus du côté LP - - - - - -	19.9801430

(b) N. 103. qui (*b*) donne 72 deg. 48 min. 20 sec. pour la valeur de ce côté; dont le complément, 17 deg. 11 min. 40 sec. est la vraie déclinaison DL de la Planete proposée.

4^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le côté TZ de 40 deg. 27 min. 8 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 39 degrés 48 min. & de la parallaxe de hauteur LT, qui est donnée de 39 min. 8 sec. le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec l'angle TZP, ou LZP, que l'on a aussi trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. Ainsi, après
(c) N. 297. avoir supposé (*c*) un arc TN d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculaire-

ment au côté ZP, (prolongé vers N, parce que les angles TPZ & TZP sont de différente espece,) on cherche de la maniere suivante (a) le côté NZ du triangle-Sphérique NTZ, qui [c] est rectangle en N, & dont l'angle TZN est le supplément de l'angle connu TZP. (a) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle TZN *trouvé de* 47 *deg.* 52 *min.* 32 *sec.*	0.1734438
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ *trouvée de* 40 *deg.* 27 *min.* 8 *sec.* -	10.0692345
Logar. de la tangente du complément du côté NZ -	10.2426783

qui (b) donne 60 deg. 14 min. 4 sec. $\frac{4}{5}$ *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 29 deg. 45 min. 55 sec. $\frac{1}{5}$ pour celle de ce côté; laquelle étant ajoûtée au côté ZP, que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. donne 70 deg. 55 min. 45 sec. $\frac{1}{5}$ pour la valeur du segment NZP. (b) N. 103.

5^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le segment NZP que l'on vient de trouver de 70 degrés 55 minutes 45 sec. $\frac{1}{5}$; le segment NZ que l'on vient aussi de trouver de 29 deg. 45 min. 55 sec. $\frac{1}{5}$; avec l'angle TZP que l'on a trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (c), l'autre angle TPZ. (c) N. 317.

Compl. du logar. du sinus du segment NZP *trouvé de* 70 *deg.* 55 *min.* 45 *sec.* $\frac{1}{5}$ - - -	0.0245151
Logar. du sinus du segment NZ *trouvé de* 29 *deg.* 45 *min.* 55 *sec.* $\frac{1}{5}$ - - - - -	9.6958745
Logar. de la tangente de l'angle TZP *trouvé de* 132 *deg.* 7 *min.* 28 *sec.* - - - - - - - -	10.0436660
Logar. de la tangente de l'angle TPZ - - -	19.7640556

qui (d) donne 30 deg. 8 min. 59 sec. *p. m.* pour la valeur de (d) N. 103.

cet angle; de laquelle ayant retranché l'angle LZP, que l'on a trouvé de 29 deg. 48 min. le reste 20 min. 59 sec. est la valeur de l'angle TPL, ou BPD; & par conséquent, celle de la pre-
(a) N. 196. miére Parallaxe demandée, puisque (a) cette Parallaxe est la mesure de cet angle.

6ent enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît l'angle TPZ que l'on vient de trouver de 30 deg. 8 min. 59 sec. l'angle TZP que l'on a trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. avec le côté TZ que l'on a aussi trouvé de 40 deg. 27 min. 8 sec. Ainsi,
(b) N. 291. l'on cherche de la maniére suivante (b), le côté TP.

Complément du logarithme du sinus de l'angle TPZ *trouvé de* 30 *deg.* 8 *min.* 59 *sec.* - - - -	0.2990701
Logar. du sinus de l'angle TZP *trouvé de* 132 *deg.* 7 *min.* 28 *sec.* - - - - - - - - - - - -	9.8702221
Logarithme du sinus du côté TZ *trouvé de* 40 *deg.* 27 *min.* 8 *sec.* - - - - - - - - - - - - -	9.8121200
Logar. du sinus du côté TP - - - - -	19.9814124

(c) N. 203. qui (c) donne 73 deg. 21 min. 22 sec. pour la valeur de ce côté; dont le complément 16 deg. 38 min. 38 sec. est la valeur de la déclinaison apparente BT de la Planete proposée. Ainsi, si l'on retranche cette déclinaison de la vraie déclinaison DL, que l'on a trouvée de 17 deg. 11 min. 40 min. le reste 33 min. 2 sec. est la valeur de la seconde Parallaxe demandée FL.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 199. 447. *On donne la hauteur* OP* *du Pôle* P *sur l'horison* HO, *de* 48 *deg.* 50 *min.* 10 *sec. la vraie hauteur* CL *de la Lune* L *sur le même horison, de* 26 *deg.* 42 *min. sa distance* DE *au Méridien* HZO, *de* 31 *deg.* 13 *min. avec*

sa Parallaxe de hauteur LT, *de* 52 *min.* 27 *sec.* & *il faut trouver la Parallaxe* DB *de l'ascension droite* ♈QED *de cette Planete, avec la Parallaxe* FT *de sa déclinaison* DL *qui est Méridionale.*

Solution. 1^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. le côté ZL de 63 deg. 18 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 26 deg. 42 min. avec l'angle LPZ, ou DPE, de 31 d. 13 min. puisque la distance DE de la même Planete au Méridien HZO, qui (*a*) est la mesure de cet angle, est donnée de cette grandeur. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc ZM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LP, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZPL & ZLP sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante (*c*), l'angle PZM du triangle-Sphérique MZP, qui [c] est rectangle en M.

(*a*) N. 196.
(*b*) N. 297.
(*c*) N. 283.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ZP trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec.	0.1233031
Logarithme de la tangente du complément de l'angle MPZ, ou LPZ, trouvé de 31 deg. 13 min. - -	10.2175136
Logarithme de la tangente de l'angle PZM - -	10.3408167

qui (*d*) donne 65 deg. 28 min. 34 sec. pour la valeur de cet angle.

(*d*) N. 103.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 63 deg. 18 min. avec l'angle au sommet PZM que l'on vient de trouver de 65 deg. 28 min. 34 sec. Ainsi, (a) N. 305. l'on cherche de la maniére suivante (a), l'autre angle au sommet LZM.

Complément du logar. de la tang. du complément du côté ZP *trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.* -	9.9416710
Log. de la tang. du complément du côté ZL *trouvé de 63 deg. 18 min.* - - - - - - - - -	9.7015227
Logar. du sinus du complément de l'angle PZM *trouvé de 65 deg. 28 min. 34 sec.* - - - -	9.6181240
Logar. du sinus du compl. de l'angle LZM -	29.2613177

(b) N. 103. qui (b) donne 10 deg. 31 min. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 79 deg. 29 min. pour celle de cet angle; laquelle étant ajoûtée à l'angle PZM, que l'on a trouvé de 65 deg. 28 min. 34 sec. donne 144 deg. 57 min. 34 sec. pour la valeur de l'angle LZP.

3ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît l'angle LPZ que l'on a trouvé de 31 d. 13 m. l'angle LZP que l'on vient de trouver de 144 d. 57 m. 34 s. avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 63 d. 18 m. Ainsi, l'on (c) N. 291. cherche de la maniére suivante (c), le côté LP.

Complément du logar. du sinus de l'angle LPZ *trouvé de 31 deg. 13 min.* - - - - - - - -	0.2854591
Logar. du sinus de l'angle LZP *trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec.* - - - - - - - - - -	9.7590300
Logar. du sinus du côté ZL *trouvé de 63 deg. 18 min.* - - - - - - -	9.9510320
Logar. du sinus du côté LP - - - - - -	29.9955011

(d) N.103. qui (d) donne 98 deg. 13 min. 58 sec. pour la valeur de ce côté;

côté, qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, 8 deg. 13 min. 58 sec. pour la vraie déclinaison DL de la Planete proposée.

4ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le côté TZ de 64 deg. 10 min. 27 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 63 degrés 18 min. & de la parallaxe de hauteur LT qui est donnée de 52 min. 27 sec. le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec l'angle TZP, ou LZP, que l'on a aussi trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec. Ainsi, après avoir supposé (a) un arc TN d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculairement au côté ZP, (prolongé vers N, parce que les angles TZP & TPZ sont de différente espece,) on cherche de la maniére suivante (b), le côté NZ du triangle-Sphérique NTZ qui [c] est rectangle en N, & dont l'angle TZN est le supplément de l'angle connu TZP.

(a) N. 297.

(b) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle TZN *trouvé de* 35 *deg.* 2 *min.* 26 *sec.*	0.0868509
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ *trouvée de* 64 *deg.* 10 *min.* 27 *sec.*	9.6848231
Logar. de la tang. du compl. du côté NZ - - -	9.7716740

qui (c) donne 30 deg. 35 min. 17 sec. *p. p.* pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 59 deg. 24 min. 43 sec. pour celle de ce côté; laquelle étant ajoûtée au côté ZP, que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. donne 100 deg. 34 min. 33 sec. pour la valeur du segment NZP.

(c) N. 103.

5ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle

ZTP, on connoît le ſegment NZP que l'on vient de trouver de 100 deg. 34 min. 33 ſec. le ſegment NZ que l'on vient auſſi de trouver de 59 deg. 24 min. 43 ſec. avec l'angle TZP que l'on a trouvé de 144 deg. 57 min. 34 ſec.

(a) N. 317. Ainſi, l'on cherche de la maniére ſuivante (a), l'autre angle TPZ.

Complément du logar. du ſinus du ſegment NZP *trouvé de* 100 *deg.* 34 *min.* 33 *ſec.* - - - -	0.0074408
Logar. du ſinus du ſegment NZ *trouvé de* 59 *deg.* 24 *min.* 43 *ſec.* - - - - - - - - - - -	9.9349265
Logar. de la tangente de l'angle TZP *trouvé de* 144 *deg.* 57 *min.* 34 *ſec.* - - - - - - -	9.8458809
Logar. de la tangente de l'angle TPZ - - - -	19.7882482

(b) N. 103. qui (b) donne 31 deg. 33 min. 16 ſec. *p. p.* pour la valeur de cet angle; de laquelle ayant retranché l'angle LPZ, que l'on a trouvé de 31 deg. 13 min. le reſte 20 min. 16 ſec. eſt la valeur de l'angle TPL, ou BPD; & par conſéquent, celle de la

(c) N. 196. premiére parallaxe demandée DB, puiſque (c) cette parallaxe eſt la meſure de cet angle.

6^{ent}, enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît l'angle TPZ, que l'on vient de trouver de 31 deg. 33 min. 16 ſec. l'angle TZP que l'on a trouvé de 144 deg. 57 min. 34 ſec. avec le côté TZ que l'on a auſſi trouvé de 64 d. 10 m. 27 ſ. Ainſi, l'on

(d) N. 291. cherche de la maniére ſuivante (d), le côté TP.

Complément du logarithme du ſinus de l'angle TPZ *trouvé de* 31 *deg.* 33 *min.* 16 *ſec.* - - - -	0.2812422
Logar. du ſinus de l'angle TZP *trouvé de* 144 *deg.* 57 *min.* 34 *ſec.* - - - - - - - - - - -	9.7590300
Logar. du ſinus du côté TZ *trouvé de* 64 *deg.* 10 *min.* 27 *ſec.* - - - - - - - - - -	9.9543016
Logarithme du ſinus du côté TP - - - - - -	19.9945738

(e) N. 103. qui (e) donne 99 deg. 2 min. 18 ſec. pour la valeur de ce côté

qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; & par conséquent, 9 deg. 2 min. 18 sec. pour la valeur de la déclinaison apparente BT de la Planete proposée. Ainsi, si de cette déclinaison on retranche la vraie déclinaison DL, que l'on a trouvée de 8 deg. 13 min. 58 sec. le reste 48 min. 20 sec. est la valeur de la seconde parallaxe demandée FT.

XXXII. Usage.

448. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec celle d'une Planete quelconque sur le même horison, la vraie longitude de cette Planete, sa parallaxe de hauteur, l'obliquité de l'Ecliptique, le lieu du Soleil, & l'heure; trouver les parallaxes de longitude, & de latitude de cette même Planete.*

La hauteur OP* du Pôle P sur l'horison HO, est de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur CL de la Lune L sur le même horison, est de 41 d. 28 min. la vraie longitude ♈FVD de cette Planete, est de 149 deg. 12 min. 50 sec. sa parallaxe de hauteur LT, est de 47 min. 32 sec. l'obliquité E♎V de l'Ecliptique VK, est de 23 deg. 28 min 30 sec. le lieu S du Soleil est le 18me deg. 45 min. du ♌ : enfin, il est 10 heures du matin ; & il faut trouver la parallaxe DB de la longitude ♈FVD de cette même Planete, avec la parallaxe RL de sa latitude DL.

* Fig. 200.

Solution. 1ent. Dans le triangle-Sphérique *e*S♎ qui est rectangle en *e*, on connoît l'angle *e*♎S, ou E♎V, de 23 deg. 28 m. 30 s.

puisque cet angle est donné de cette grandeur, avec l'hypoténuse S♎ de 41 d. 15 m. puisque l'arc ♈VS♎ est de 180 deg. & que le lieu S du Soleil étant donné au 18me deg. 45 min. du ♌, l'arc ♈VS doit être de 138 degrés 45 min. Ainsi, l'on cherche de la maniére (a) N. 284. suivante (a), le côté e♎ de ce triangle.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle e♎S donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse S♎ trouvée de 41 deg. 15 min. - -	10.0570121
Logar. de la tang. du compl. du côté e♎ - - -	10.0945320

(b) N. 193. qui (b) donne 51 deg. 11 min. 13 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 38 deg. 48 min. 47 sec. pour celle de ce côté, à laquelle ayant ajoûté l'arc Ee, qui est de 30 deg. (puisque la distance du Soleil au Méridien HZO, dont (c) N. 196. cet arc est la mesure (c), est donnée de 2 heures), on a 68 deg. 48 min. 47 sec. pour la valeur de l'arc Ee♎ ; & par conséquent, 21 deg. 11 min. 13 sec. pour celle du complément ♎d de cet arc Ee♎.

2ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle b♎d, on connoît le côté ♎d de 21 d. 11 min. 13 sec. puisque l'on vient de le trouver de cette grandeur : l'angle b♎d de 23 deg 28 m. 30 s. puisque cet angle est l'obliquité de l'Ecliptique, qui est donnée de cette grandeur : avec l'angle ♎db, ou EdH, de 41 deg. 9 min. (d) N. 196. 50 sec. puisque (d) ce dernier angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur, & par conséquent, le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. (e) N. 197. 10 s. Ainsi, après avoir supposé (e) un arc ♎M d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle

♎ perpendiculairement au côté *bd*, (prolongé vers M, parce que les angles ♎*bd* & ♎*db* sont de differente espece,) on cherche de la maniere suivante (*a*), l'angle *d*♎M du triangle- (*a*) N. 283.
Sphérique M♎*d* qui [c] est rectangle en M.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ♎d *trouvée de* 21 *deg.* 11 *min.* 13 *sec.* - - - - - - - - - - - - - -	0.0303948
Logarithme de la tangente du complément de l'angle ♎dM, *ou* ♎db, *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.*	10.0583290
Logarithme de la tangente de l'angle M♎d - -	10.0887238

qui (*b*) donne 50 deg. 48 min. 44 sec. pour la valeur de cet (*b*) N. 103.
angle; de laquelle ayant retranché l'angle *b*♎*d*, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 27 deg. 20 min. 14 sec. pour la valeur de l'angle M♎*b*.

3 [ent], dans le triangle-Sphérique obliquangle *b*♎*d*, on connoît l'angle au sommet M♎*d* que l'on vient de trouver de 50 deg. 48 min. 44 sec. l'autre angle au sommet M♎*b* que l'on vient aussi de trouver de 27 deg. 20 min. 14 sec. avec l'angle ♎*db* que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére suivante (*c*), l'angle ♎*b*M. † (*c*) N. 310.

Complément du logar. du sinus de l'angle M♎d *trouvé de* 50 *deg.* 48 *min.* 44 *sec.* - - -	0.1026539
Logarithme du sinus de l'angle M♎b *trouvé de* 27 *deg.* 20 *min.* 14 *sec.* - - - - - - - -	9.6620271
Logarithme du sinus du complément de l'angle ♎db *trouvé de* 41 *deg.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - -	9.8766969
Logar. du sinus du complément de l'angle ♎bM -	19.6493779

qui (*d*) donne 26 deg. 29 min. 24 sec. pour la valeur de ce (*d*) N. 103.

† C'est l'angle ♎*bd* que l'on doit se proposer de chercher (*e*) : mais comme cet angle est obtus, on trouve immédiatement (*e*) N. 310.
l'angle demandée ♎*b*M.

complément; & par conséquent, 63 deg. 30 min. 36 sec. pour
(a) N. 398. celle de cet angle. Mais (a), cet angle qui est formé par l'Ecliptique VK & par l'horison HO, a pour mesure l'arc FG du cercle vertical ZFG qui est tiré du Zénith Z par le 90me degré F de ce même Ecliptique. Ainsi, cet arc FG est aussi de 63 deg. 30 min. 36 sec. †

4^ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle b♎d, on connoît l'angle ♎bd de 116 deg. 29 min. 24 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle ♎bM que l'on vient de trouver de 63 deg. 30 min. 36 sec. l'angle ♎db de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisqu'on l'a trouvé de cette grandeur : avec le côté ♎d que l'on a aussi trouvé de 21 deg. 11 min. 13 sec. Ainsi, l'on cherche de la maniére sui-
(b) N. 291. vante (b), le côté ♎b.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ♎bd *trouvé de* 116 *deg.* 29 *min.* 24 *sec.* - - -	0.0481711
Logarithme du sinus de l'angle ♎db *trouvé de* 41 *d.* 9 *min.* 50 *sec.* - - - - - - - - - - -	9.8183678
Logarithme du sinus du côté ♎d *trouvé de* 21 *deg.* 11 *min.* 13 *sec.* - - - - - - - - - - -	9.5580027
Logarithme du sinus du côté ♎b - - - -	19.4245416

(c) N. 103. qui (c) donne 15 deg. 24 min. 50 sec. pour la valeur de ce côté; laquelle étant ajoûtée à l'arc ♈FV♎, qui est de 180 deg. donne 195 deg. 24 min. 50 sec pour la valeur de l'arc ♈FV♎b; & par conséquent, si de ce dernier arc on retranche l'arc FV♎b de 90 deg. le reste ♈F est de 105 deg. 24 min. 50 sec.

† Nous aurions pû chercher le 90me deg. F de l'Ecliptique VK, & l'angle ♎bM que ce cercle forme avec l'horison HO, de la même maniere dont nous l'avons fait au n° 396 qui est la plus courte. Mais nous avons pris ici une route différente, afin de faire voir aux commençans qu'il y a souvent plusieurs manieres de résoudre le même Problême.

5ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît le côté ZI de 63 deg. 30 min. 36 sec. puisque les arcs ZFG & FZI étant chacun le quart de la circonférence d'un cercle, l'arc ZI est égal à l'arc FG que l'on a trouvé de cette grandeur : le côté ZL de 48 deg. 32 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 41 deg. 28 min. avec l'angle ZIL, ou FID, de 43 deg. 48 min. puisque (*a*) cet angle a pour mesure la diffé- (a) N. 196.
rence FVD de l'arc ♈F que l'on vient de trouver de 105 deg. 24 min. 50 sec. à l'arc ♈FVD qui est donné de 149 deg. 12 min. 50 sec. Ainsi, après avoir supposé (*b*) un arc ZN (b) N. 297.
d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LI, (qu'il rencontre en un point N, parce que les angles ZIL & ZLI sont de même espece,) on cherche de la maniére suivante (*c*), l'angle NZI du trian- (c) N. 283.
gle-Sphérique NZI qui [c] est rectangle en N.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ZI *trouvée de* 63 *d.* 30 *m.* 36 *s.*	0.3506246
Logarithme de la tangente du complément de l'angle ZIN, *ou* ZIL *trouvé de* 43 *deg.* 48 *min.* -	10.0181970
Logarithme de la tangente de l'angle NZI - -	10.3688216

qui (*d*) donne 66 deg. 50 min. 30 sec. pour la valeur de cet angle. (d) N. 103.

6ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît le côté ZI que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min. 36 sec. le côté ZL

que l'on a aussi trouvé de 48 deg. 32 min. avec l'angle au sommet NZI que l'on vient de trouver de 66 deg. 50 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 305. l'on cherche de la maniére suivante (*a*), l'autre angle au sommet LZN.

Complément du logarithme de la tangente du compl. du côté ZI *trouvé de* 63 *deg.* 30 *min.* 36 *sec.* - -	0.3024536
Logarithme de la tangente du complément du côté ZL *trouvé de* 48 *deg.* 32 *min.* - - - - - -	9.9462993
Logarithme du sinus du complément de l'angle NZI *trouvé de* 66 *deg.* 50 *min.* 30 *sec.* - - -	9.5946945
Logar. du sinus du complément de l'angle LZN	19.8434474

(b) N. 103. qui (*b*) donne 44 deg. 12 min. 51 sec. $\frac{7}{12}$ *p. p.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 45 deg. 47 min. 8 sec. $\frac{5}{12}$ pour celle de cet angle ; laquelle étant ajoûtée à l'angle NZI, que l'on a trouvé de 66 deg. 50 min. 30 sec. donne 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ pour la valeur de l'angle LZI.

7ent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît l'angle ZIL que l'on a trouvé de 43 deg. 48 min. l'angle LZI que l'on vient de trouver de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$: avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 48 deg. 32 min. Ainsi, l'on cherche (c) N. 291. de la maniére suivante (*c*), le côté LI.

Complément du logar. du sinus de l'angle ZIL *trouvé de* 43 *deg.* 48 *min.* - - - - - - - -	0.1598041
Logarithme du sinus de l'angle LZI *trouvé de* 112 *deg.* 37 *min.* 38 *sec.* $\frac{5}{12}$ - - - - - -	9.9652141
Logarithme du sinus du côté ZL *trouvé de* 48 *deg.* 32 *min.* - - - - - - - - - - - - -	9.8746795
Logarithme du sinus du côté LI - - - - - -	19.9996977

(d) N. 103. qui (*d*) donne 87 deg. 51 min. 46 sec. *p. m.* pour la valeur de ce côté ; dont le complément 2 deg. 8 min. 14 sec. est la vraie latitude DL de la Planete proposée.

8ent, dans

8ème. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTI, on connoît le côté TZ de 49 degrés 19 min. 32 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 48 degrés 32 min. & de la parallaxe de hauteur LT qui est donnée de 47 min. 32 sec : le côté ZI que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min 36 s. avec l'angle TZI, ou LZI, que l'on a aussi trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{11}$. Ainsi, après avoir supposé (a) un arc TtX d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculairement au côté ZI (prolongé vers X, parce que les angles TZI & TIZ sont de différente espéce ;) on cherche de la maniére suivante (b) le côté XZ du Triangle-sphérique XtTZ qui [c] est rectangle en X, & dont l'angle TZX est le supplément de l'angle connu TZI. (a) N. 297. (b) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle TZX trouvé de 67 deg. 22 min. 21 sec. $\frac{6}{11}$	0.4148374
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ trouvée de 49 deg. 19 min. 32 sec.	9.9341751
Logar. de la tang. du complément du côté XZ	10.3490125

qui (c) donne 65 deg 52 min 55 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 24 deg. 7 min. 5 sec, pour celle de ce côté ; laquelle étant ajoûtée au côté ZI, que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min. 36 sec. donne 87 deg. 37 min. 41 sec, pour la valeur du segment XZI. (c) N. 103.

9ème. Dans le Triangle-sphérique obliquangle ZTI, on connoît le segment XZI que l'on vient de trouver de 87 degrés 37 min. 41 sec.

le segment XZ que l'on vient aussi de trouver de 24 deg. 7 min. 5 sec : avec l'angle TZI que l'on a trouvé de 112 deg. 37 min. 38 secondes $\frac{5}{12}$. Ainsi, l'on cherche de la manière
(a) N. 317. suivante (a), l'autre angle TIZ.

Complément du logarithme du sinus du segment XZI trouvé de 87 deg. 37 min. 41 sec. - - - -	0.0003725
Logarithme du sinus du segment XZ trouvé de 24 deg. 7 min. 5 sec. - - - - - - - - -	9.6113176
Logarithme de la tangente de l'angle TZI trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ - - - - -	10.3800517
Logarithme de la tangente de l'angle TIZ - - -	19.9917416

(b) N. 103. qui (b) donne 44 deg. 27 min. 19 sec. pour la valeur de cet angle ; de laquelle ayant retranché l'angle ZIL, que l'on a trouvé de 43 deg. 48 min. le reste 39 min. 19 sec. est la valeur de l'angle TIL, ou BID ; & par conséquent, celle de la
(c) N. 196. première parallaxe demandée DB, puisque (c) cette parallaxe est la mesure de cet angle.

10^{ent}. Enfin, dans le Triangle-sphérique obliquangle ZTI, on connoît l'angle TIZ que l'on vient de trouver de 44 deg. 27 min. 19 secondes : l'angle TZI que l'on a trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ avec le côté TZ que l'on a aussi trouvé de 49 degrés 19 min. 32 sec. Ainsi, l'on cherche de la
(d) N. 291. manière suivante (d), le côté TI.

Complément du logarithme du sinus de l'angle TIZ trouvé de 44 deg. 27 min. 19 sec. - - - -	0.1546835
Logar. du sinus de l'angle TZI trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ - - - - - - - - -	9.9652140
Logarithme du sinus du côté TZ trouvé de 49 deg. 19 min. 32 sec. - - - - - - - - - - -	9.8799127
Logar. du sinus du côté TI. - - - - - -	29.9998102

(e) N. 103. qui (e) donne 88 deg. 18 min. 26 sec. pour la valeur de ce

côté ; dont le complément 1 deg. 41 min. 34 sec. est la valeur de la latitude apparente BT de la planette proposée. Ainsi, si l'on retranche cette latitude de la vraie latitude DL, que l'on a trouvée de 2 deg. 8 min. 14 sec. le reste 26 min. 40 sec. est la valeur de la seconde parallaxe demandée RL.

SCHOLIE. I.

449. *On cherche les réfractions d'ascension droite, de déclinaison, de longitude, & de látitude d'un Astre dont on connoît la réfraction de hauteur, de la même maniére dont nous venons de chercher dans ces deux derniers Usages, les parallaxes d'ascension droite, de déclinaison, de longitude, & de latitude d'une Planette dont nous connoissions la parallaxe de hauteur.*

SCHOLIE II.

450. VOILA presque toutes les Questions astronomiques qui dépendent de la Trigonométrie sphérique ; & celles que nous avons omises ne peuvent causer aucune difficulté. Ainsi, si l'on joint à ce Traité une bonne Théorie des Planettes, on aura tout ce qui sera nécessaire pour s'instruire parfaitement de l'Astronomie.

FIN.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé, TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMETRIE, contenant &c. par M. Audierne, & je n'y ai rien trouvé qui en puisse empêcher l'impression. A Paris, ce 17 Décembre 1749.

GLAIRAUT.

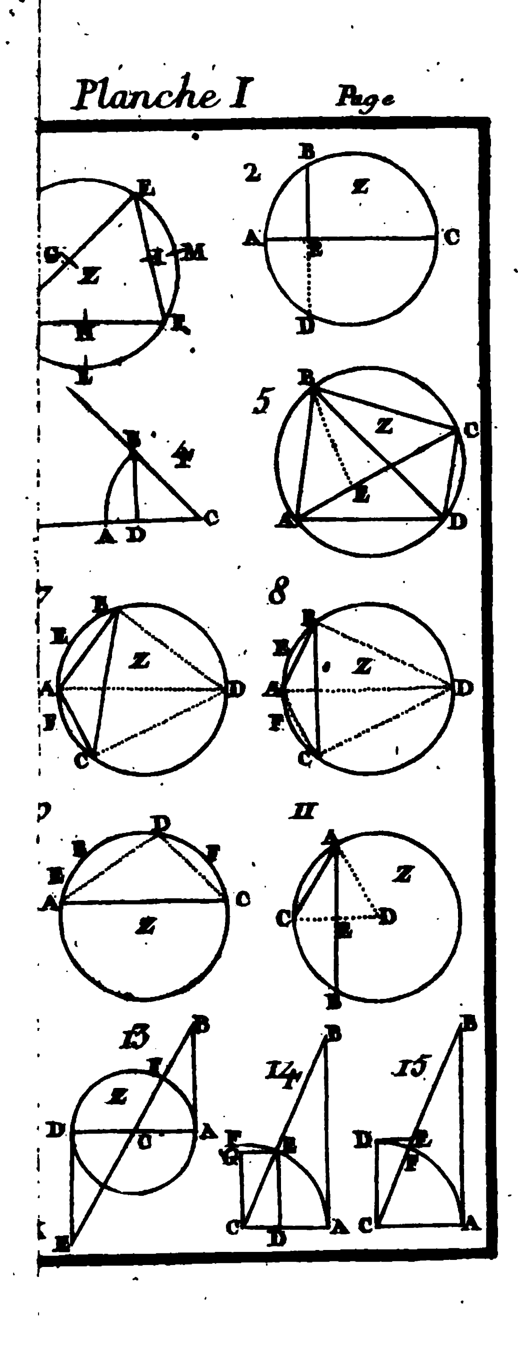
PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT. Notre amé CLAUDE-JEAN-BAPTISTE HERISSANT fils, Libraire à Paris, nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au public un Ouvrage qui a pour titre : *Traité complet de Trigonometrie*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de trois années consécutives à compter du jour de la date des présentes; Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout-au-long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modele sous le contre-scel des présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. qu'avant de l'exposer en vente le manuscrit qui aura servi de copie à la réimpression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des présentes qui sera imprimée tout-au-long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-quatriéme jour du mois de Janvier l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre régne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre xij. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 389. fol. 269. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le 17. Février 1750.

LE GRAS, Syndic.


Planche I
Page
2
4
5
7
8
11
13
14
15

APPROBATION.

'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé, TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMÉTRIE, contenant &c. par M. Audierne, & je n'y ai trouvé qui en puisse empêcher l'impression. A Paris, ce 17 Décembre 1749.

CLAIRAUT.

PRIVILÉGE DU ROI.

OUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT. Notre amé CLAUDE-JEAN-BAPTISTE HERISSANT fils, Libraire à Paris, nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au public un Ouvrage qui a pour titre: *Traité complet de Trigonometrie*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de trois années consécutives à compter du jour de la date des présentes; Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, en introduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout-au-long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modele sous le contre-scel des présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. qu'avant de l'exposer en vente le manuscrit qui aura servi de copie à la réimpression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des présentes qui sera imprimée tout-au-long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi soit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-quatriéme jour du mois de Janvier l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre régne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre xij. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 389. fol. 269. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris le 17. Février 1750.

LE GRAS, Syndic.

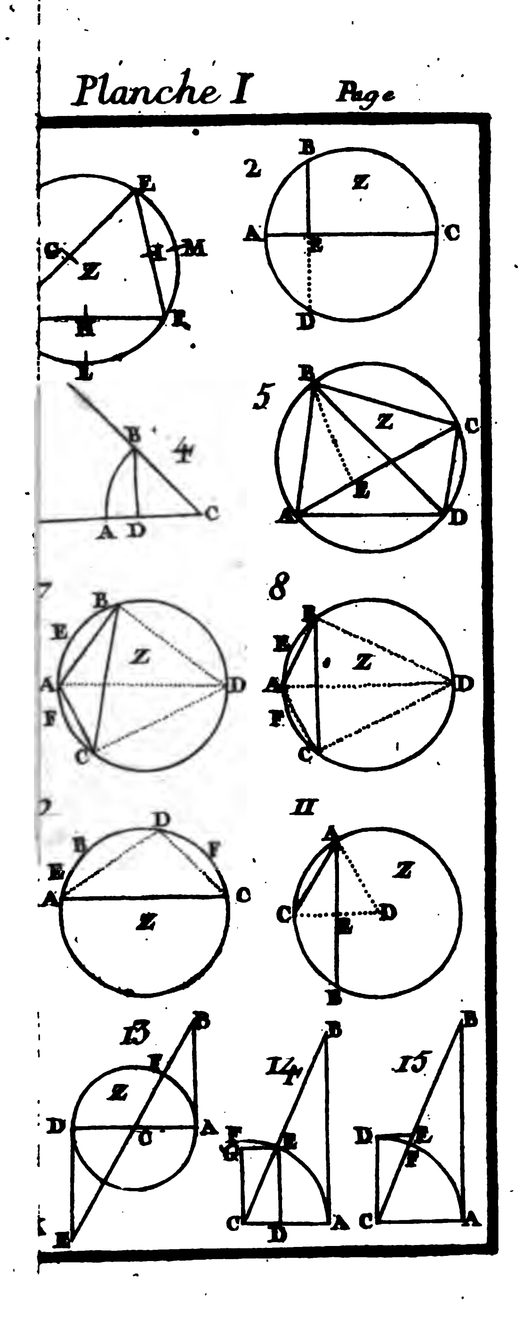

Planche I
Page
2
4
5
8
11
13
14
15

Planche II Page

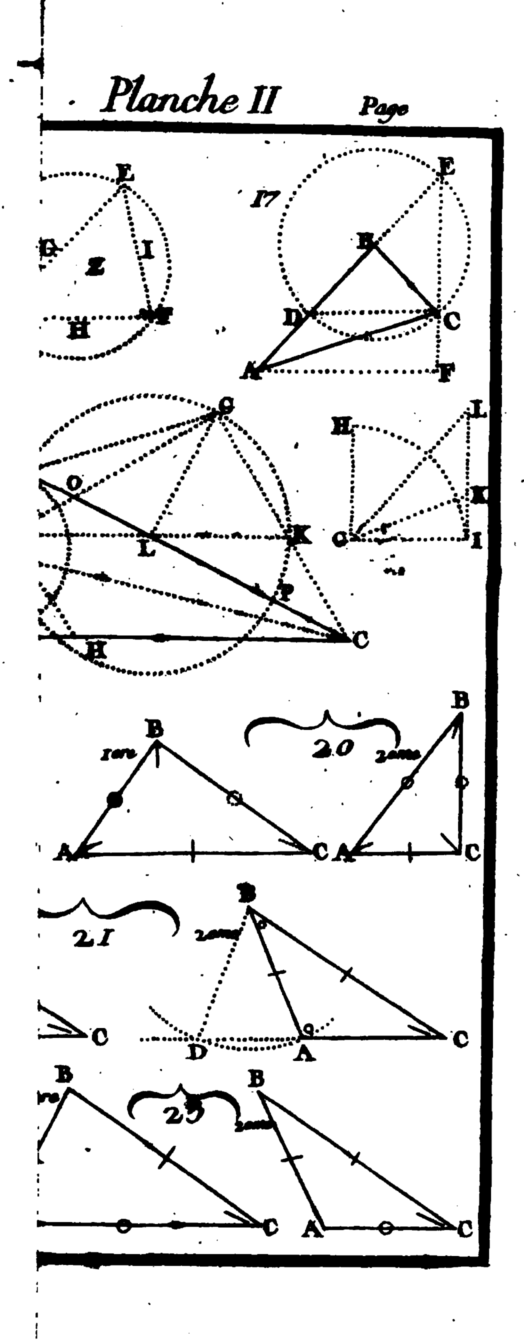


Planche II

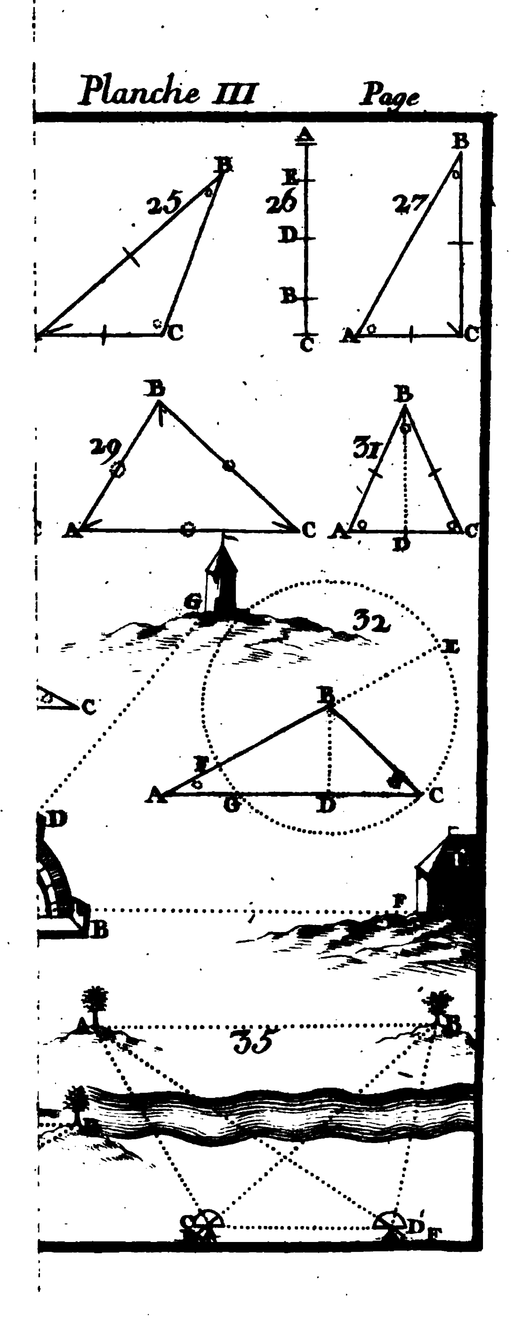
Page

17

20

21

23


Planche III
Page
25
26
27
29
31
32
35

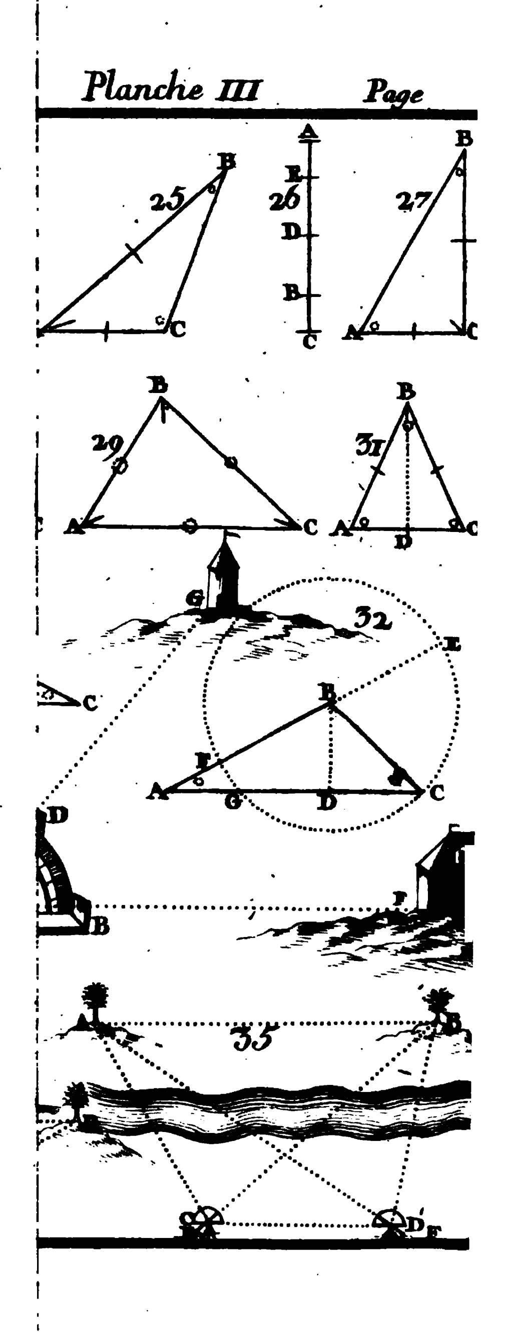


Planche III
Page
25
26
27
29
31
32
35

Planche IV Page

37

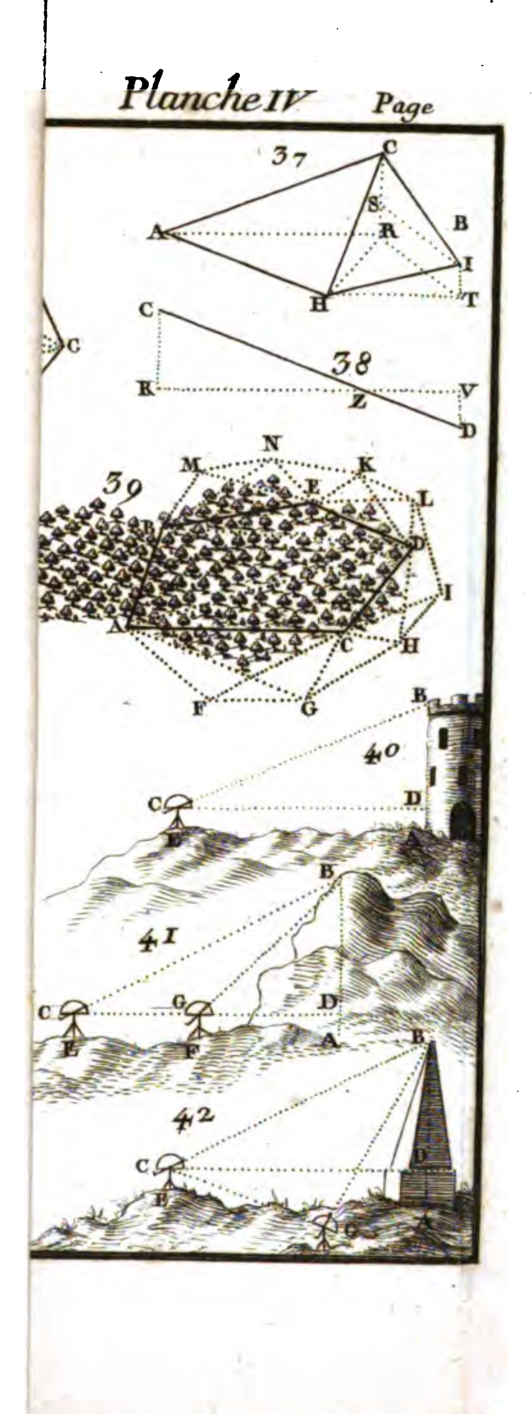
38

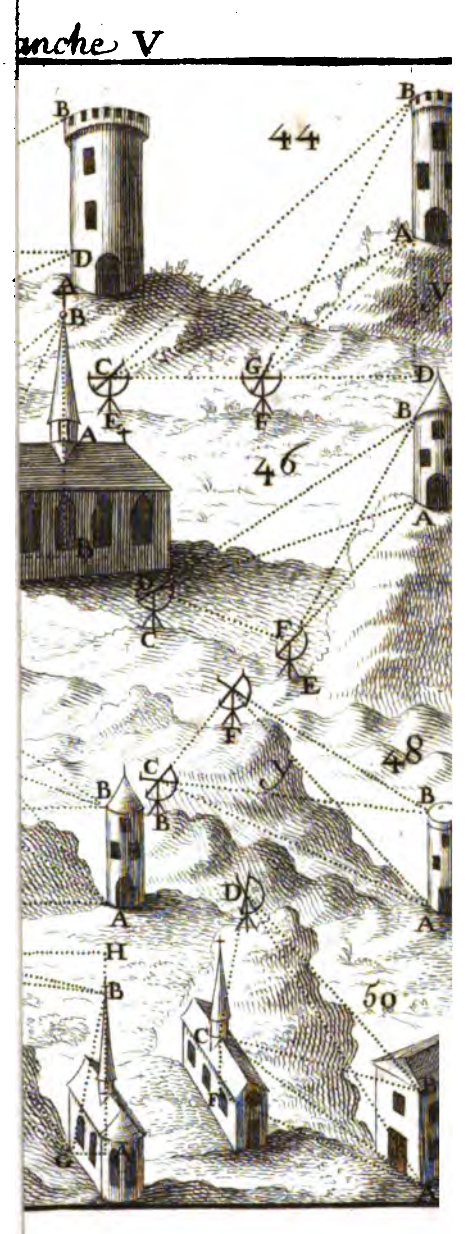
39

40

41

42

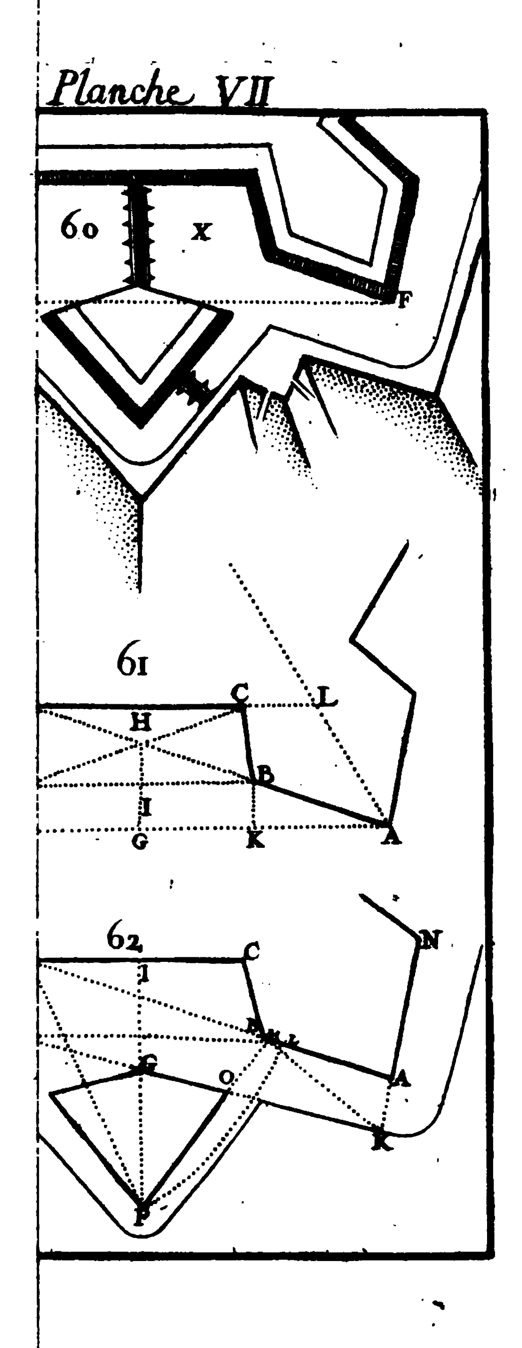

Planche IV
Page
37
C
S
B
A
R
I
H
T
C
C
38
R
V
Z
D
N
M
K
39
E
L
D
I
A
C
H
F
G
B
40
C
D
E
A
B
41
C
G
D
E
F
A
B
42
C
D
F
G
A


anche V
44
46
48
50



lanche VI.
52
54
55
57
59

Planche VII



anche VIII

4

65

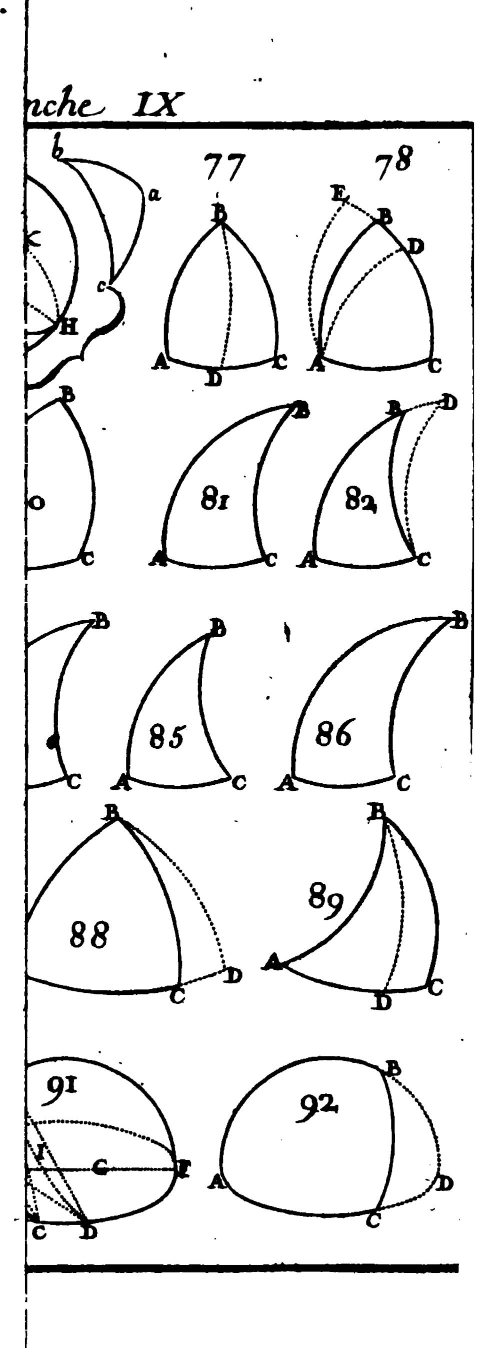
7

68

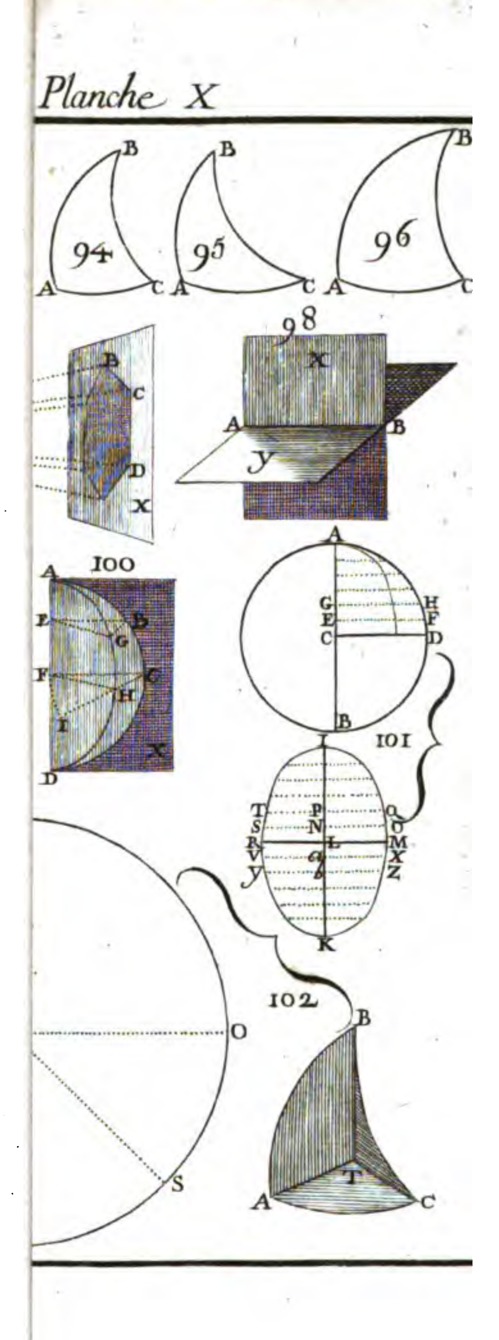
71

73

75



nche IX
77
78
81
82
85
86
88
89
91
92


Planche X
B
94
A
C
B
95
A
C
B
96
A
C
B
C
D
X
98
X
A
B
y
100
A
E
B
G
F
C
H
I
X
D
A
G
H
E
F
C
D
B
101
I
T
P
Q
S
N
O
R
L
M
V
a
X
y
b
Z
K
102
O
S
B
T
A
C

anche XI

B
E
C
O
A

104
G
E
H
B
F
I
A
D
C

105
B
R
T
C
E
O
A
S

107
B
A
D
C

B
106
H
C
I
F

nche XI

B
E
C
O
A

104
G
E H
B
F
I
A D C

105
B
R
T
C
F
O A
S

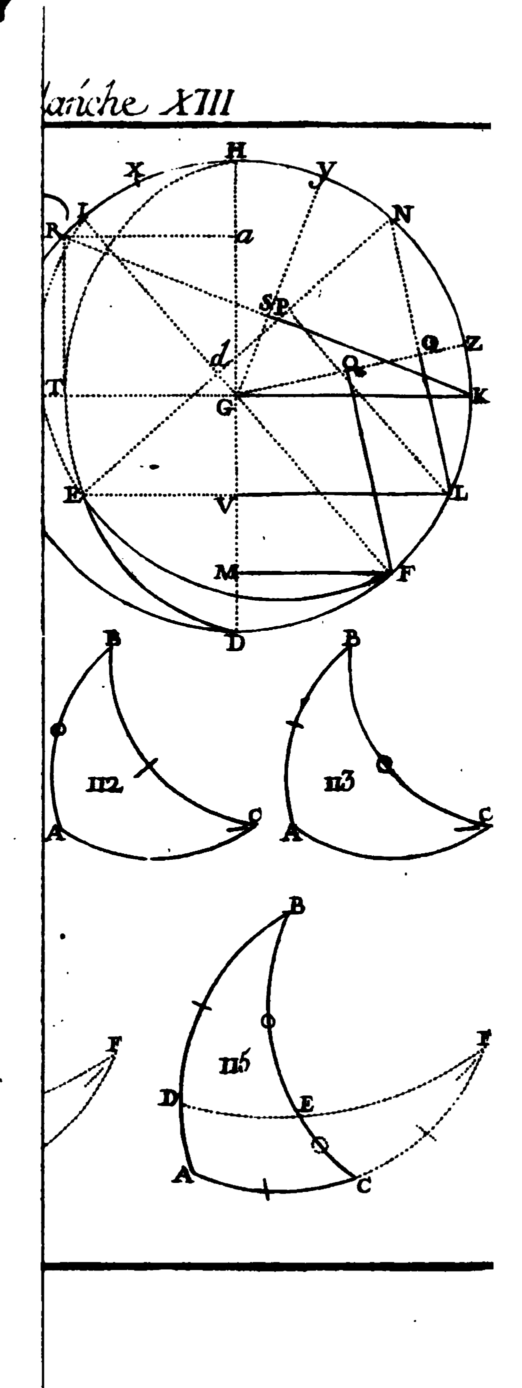
B
107
A
C
D

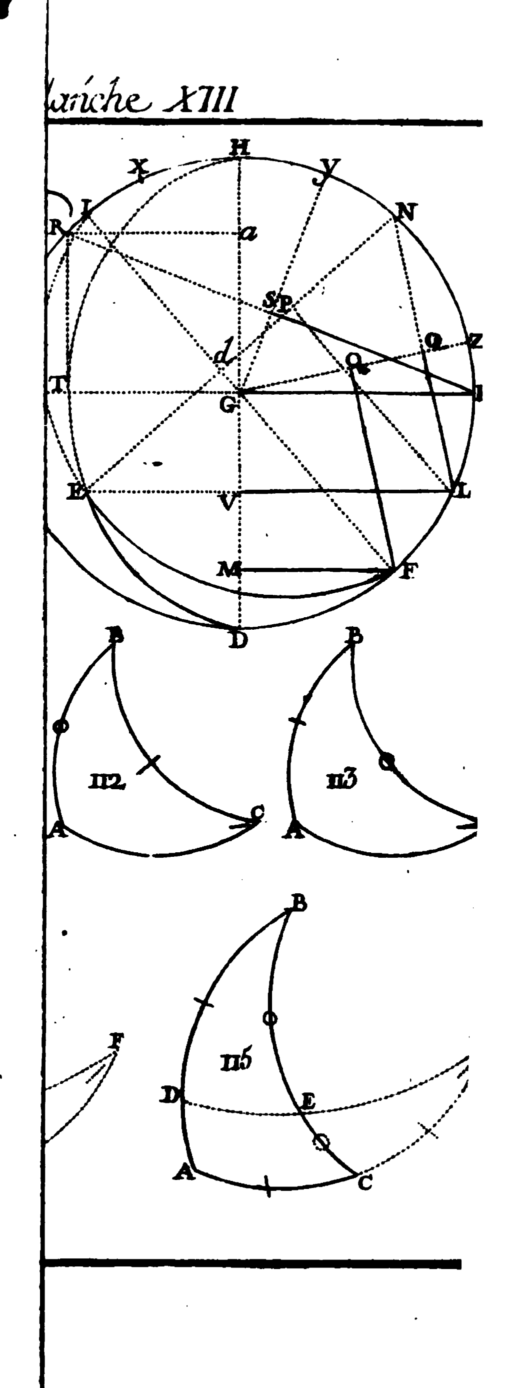
B
106
H
C
F
I

anche XII

108

9


lanche XIII
H
X
Y
I
R
a
N
S P
Q
Z
d
O
T
G
K
E
V
L
M
F
D
B
112
C
A
B
113
C
A
B
115
F
D
E
A
C
F



lanche XIII
H
X
Y
I
N
R
a
S
P
d
Q
Z
O
T
G
E
V
L
M
F
D
B
112
A
C
B
113
A
B
115
F
D
E
A
C

Planche XIV

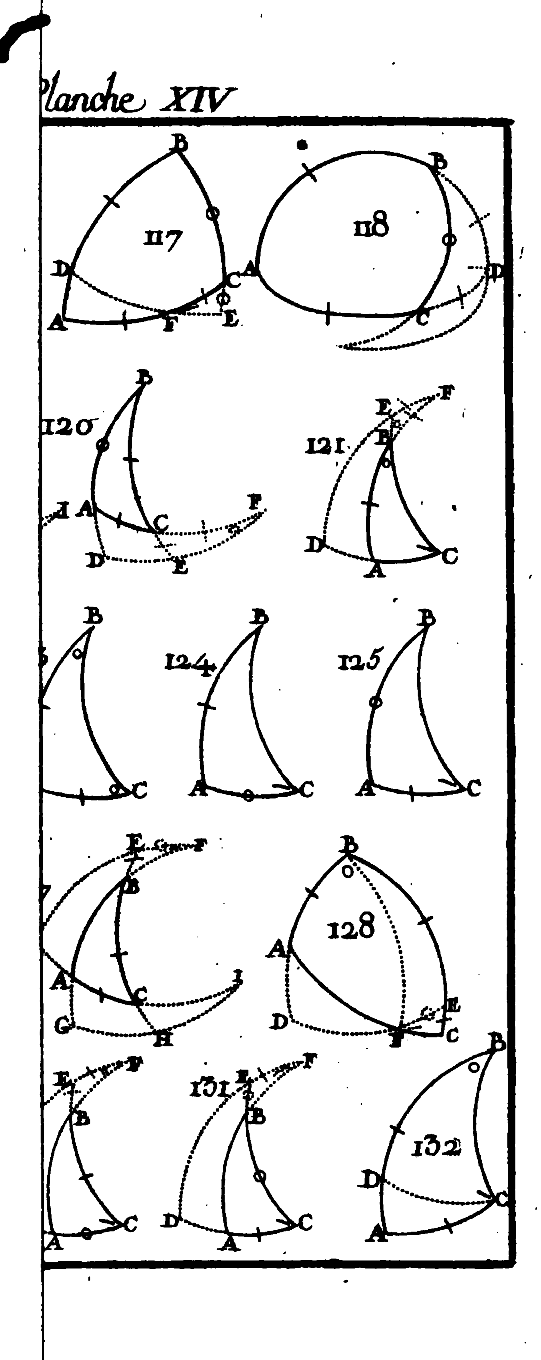




Planche XIV

nche XV

135

134

138

139

141

142

144

145

B A C H E I F D G

B C

B A C D

B A C D

B A D C

B A D C

C

B A D C

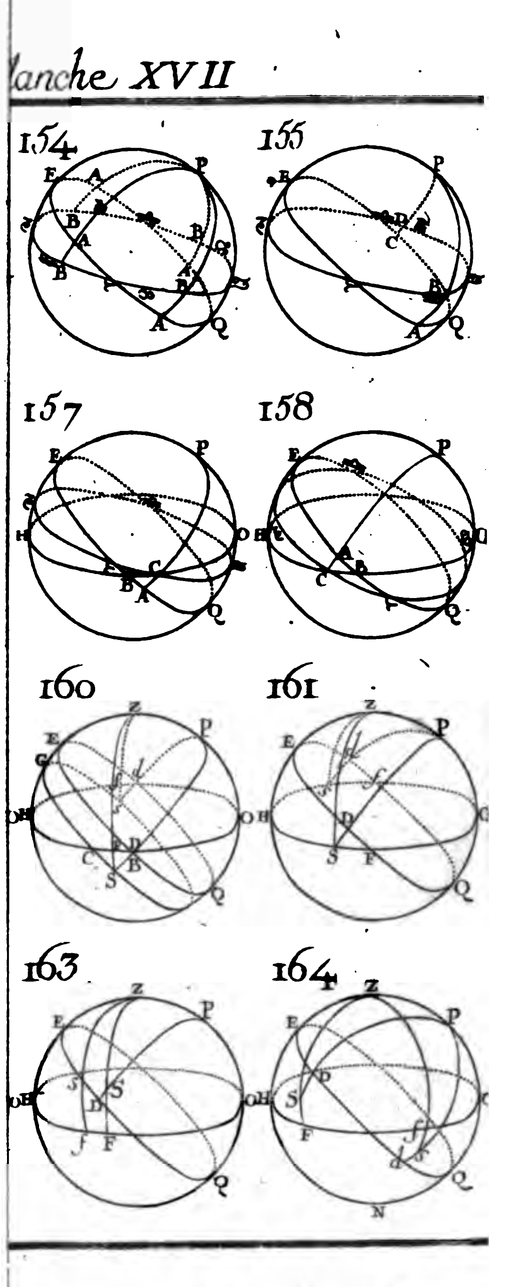
B A D C

ache XVI

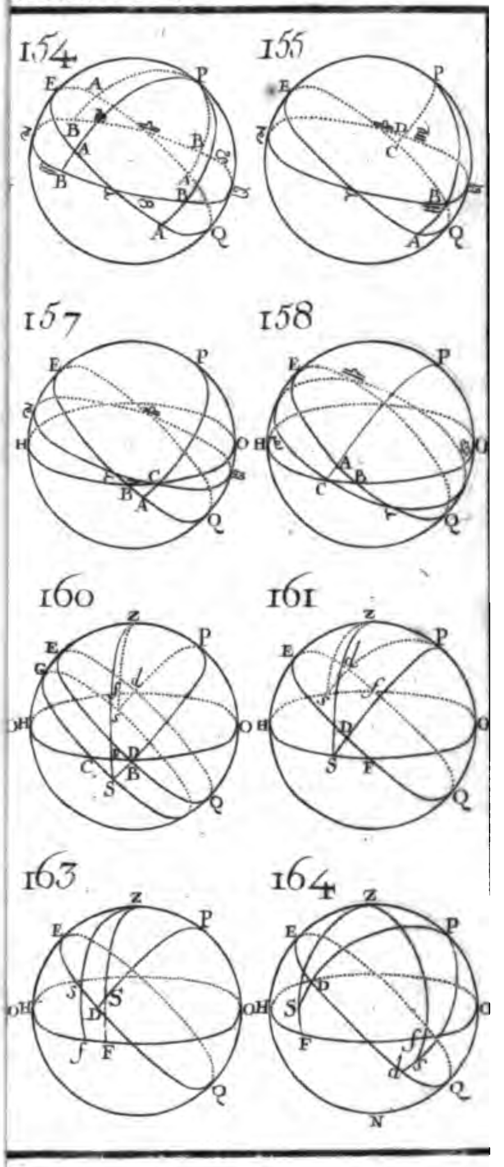
147

149

150


lanche XVII
154
155
157
158
160
161
163
164

lanche XVII



che XVIII

66

167

69

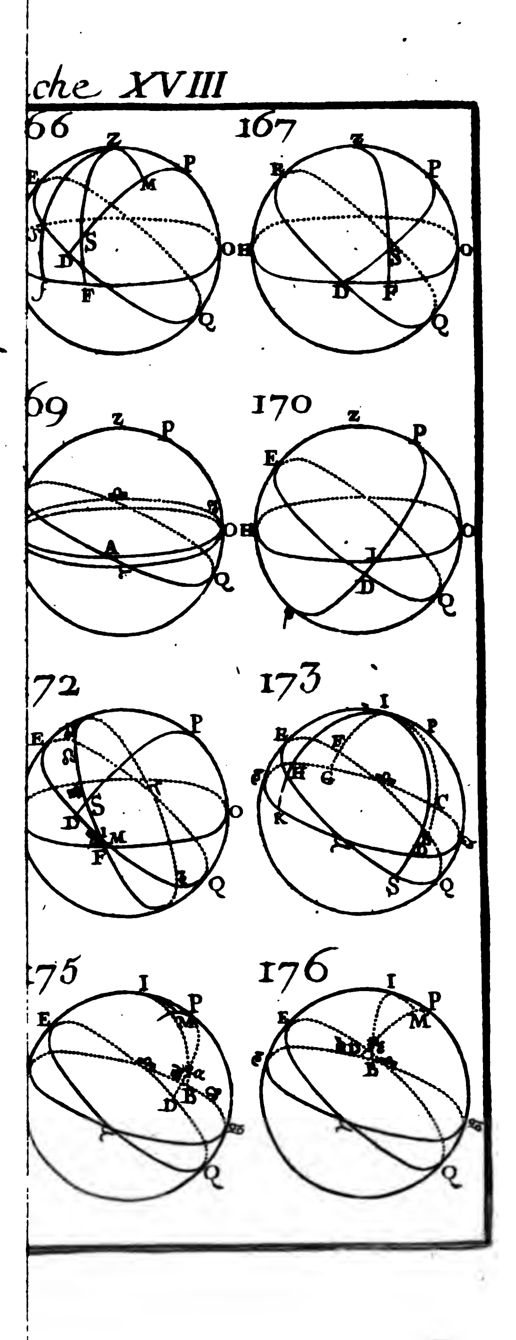
170

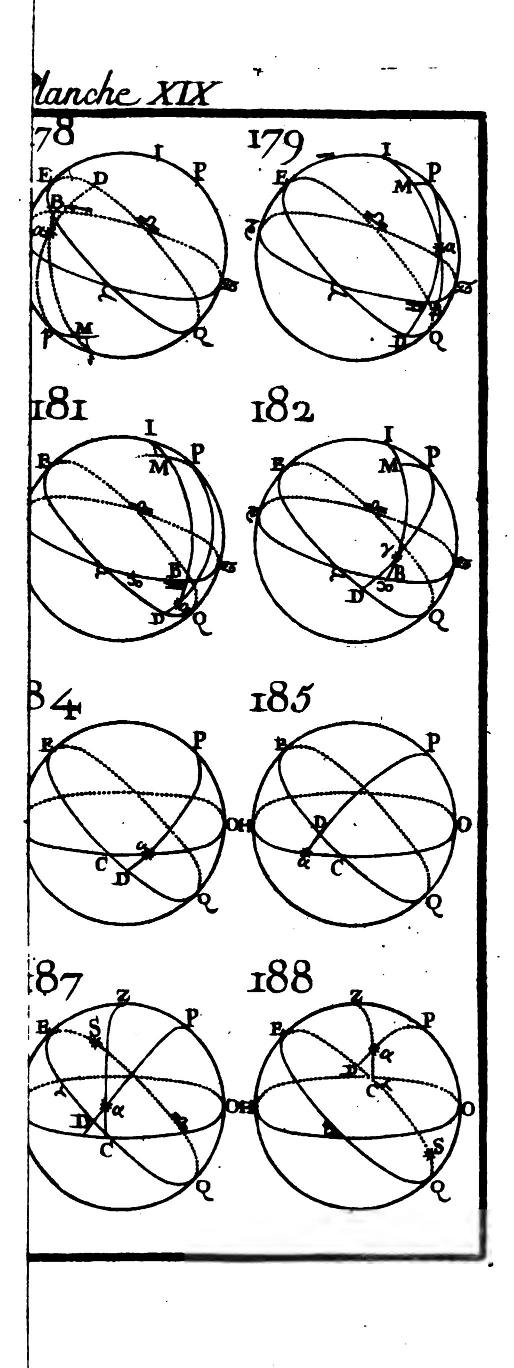
72

173

75

176


che XVIII
66
167
69
170
72
173
75
176



lanche XIX
78
179
181
182
84
185
87
188

lanche XIX

78 179

181 182

84 185

87 188

anche XX

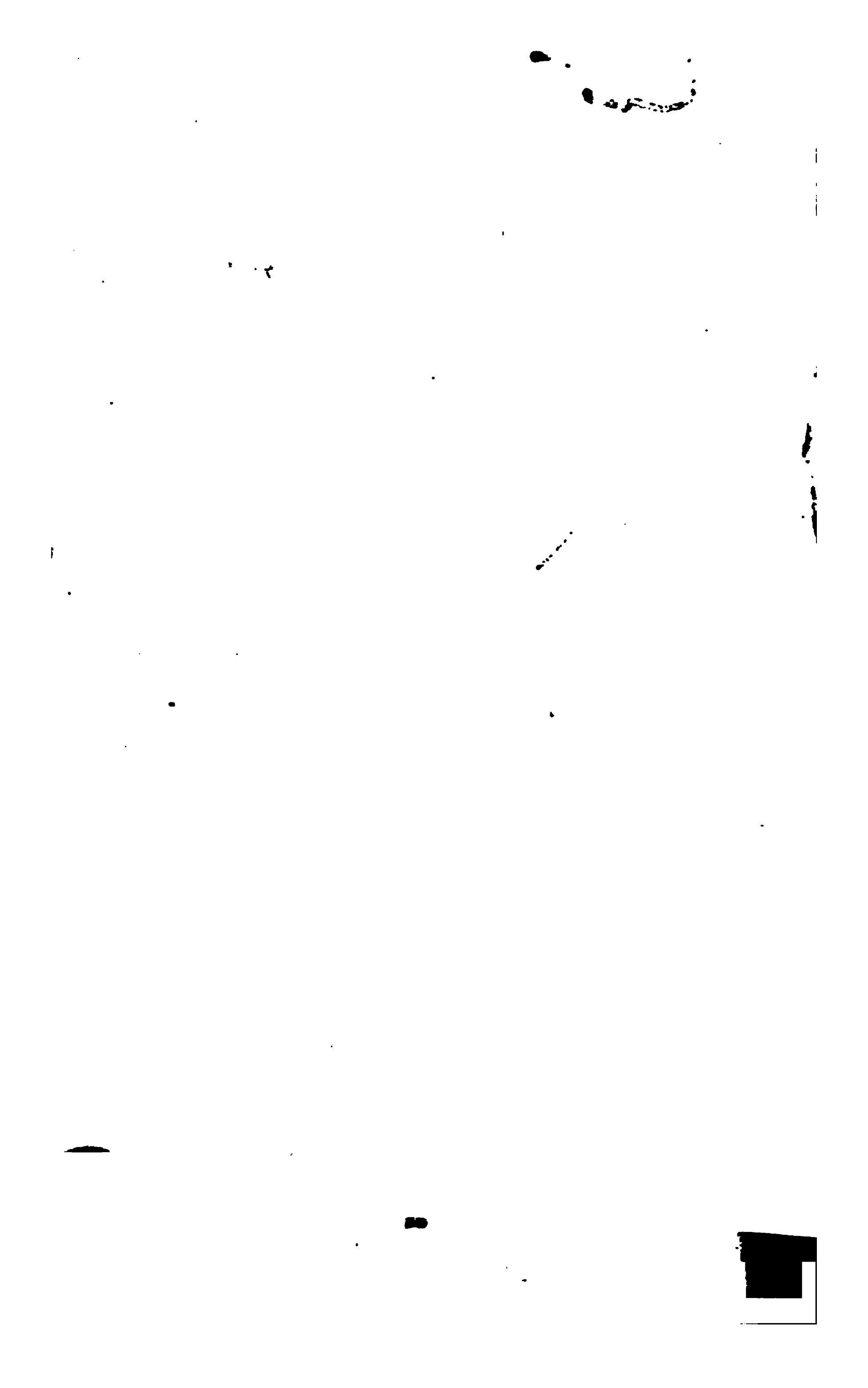
0
M
Z
P
a
D
O
S
C
Q
191
F
M
A
B
D
b
C
3
M
N
D
L
P
A
C
Q
194
E
P
H
D
M
a
F
B
Q
6
Z
P
D
a
F
B
G
Q
OH
197
Z
E
P
D
G
a
F
B
C
Q
9
Z
M
P
F
C
OH
Q
200
V
Z
E
P
G
d
Q
K

Lire

le chapitre Ier, du Ier Livre en entier

2e. Livre

Depuis la page 114 jusqu'à la 176e



[illegible]